Oblig 1 er lagt ut. Neste fredag: 1 times skriveøkus
Tillitsvalgte.

Eksempel 3.4.6 Arbeid utført av en kraft er lik endringen i kinetisk energi

$$W = \int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r} \overset{\text{2. Newton}}{=} \int_{C} m\vec{a} \cdot d\vec{r} \overset{\text{def}}{=} \int_a^b m\,\vec{a}(t) \cdot \underbrace{\vec{v}(t)}_{\vec{r}\,'(t)}\,dt$$

Siden $(v(t))^2 = \vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)$, så er

$$(v(t)^2)' = \vec{v}\,'(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{v}(t) \cdot \vec{v}\,'(t) = 2\,\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t).$$

Derfor: $W = \int_a^b m\left(\frac{1}{2}v(t)^2\right)' dt \overset{\text{analysens fund. teorem}}{=} \left[\frac{1}{2} m\, v(t)^2\right]_a^b$

$= \frac{1}{2} m\,(v(b))^2 - \frac{1}{2} m\,(v(a))^2$

$=$ endring i kinetisk energi.

Seksjon 3.5 Gradienter og konservative felt.

Hvis $\phi(x_1, \dots, x_n)$ er et skalarfelt i n variable, så er

$\nabla\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n}\right)$ et vektorfelt. Dette kalles gradienten til ϕ

Definisjon 3.5.3

Hvis $\vec{F} = \nabla\phi$ for alle $\vec{x}$ (i A), sier vi at ϕ er en potensialfunksjon for $\vec{F}$ (i A), og at $\vec{F}$ er konservativt i A.

Teorem 3.5.7

Hvis $\vec{F}$ har kont. partielle deriverte (i A), og A er åpent og enkeltsammenhengende (område "uten" huller, som er sammenhengende)

Da gjelder: $\vec{F}$ konservativt $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ for alle i, j

Bevis en vei: Hvis $\vec{F} = \nabla\phi$, så får vi

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \blacksquare$$

Setning 3.5.1

Anta $\phi : A \to \mathbb{R}$ er funksjon i n variable, kontinuerlig gradient.
Hvis $\vec{r} : [a,b] \to A$ er en stykkevis glatt parametrisering av kurven $\mathcal{C}$, så er

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{r}(b)) - \phi(\vec{r}(a))$$

Bevis:

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\vec{r} = \int_a^b \nabla\phi(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \big(\phi(\vec{r}(t))\big)'\, dt \overset{\text{anal. fund.}}{=} \Big[\phi(\vec{r}(t))\Big]_a^b$$

$$= \phi(\vec{r}(b)) - \phi(\vec{r}(a)) \quad \blacksquare$$

Eksempel 1: Vis at $\vec{F}(\vec{x}) = \dfrac{k\vec{x}}{|\vec{x}|^r}$ er konservativt når $r \neq 2$, og har potensialfunksjonen $\phi(\vec{x}) = -\dfrac{k}{(r-2)\,|\vec{x}|^{r-2}}$

Løsning: Vi kan skrive

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{k}{r-2}\Big(\big(x_1^2 + \cdots + x_n^2\big)^{\frac{1}{2}}\Big)^{2-r}$$

$$= -\frac{k}{r-2}\big(x_1^2 + \cdots + x_n^2\big)^{1-\frac{r}{2}}$$

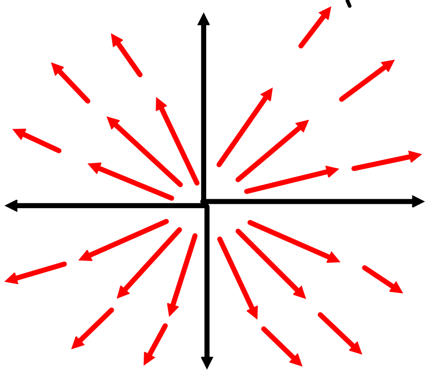
$$\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = -\frac{k}{r-2} \cdot 2x_i \left(1 - \frac{r}{2}\right)\big(x_1^2 + \cdots + x_n^2\big)^{-\frac{r}{2}}$$

$$-\frac{2(1-\frac{r}{2})}{r-2} = \frac{r-2}{r-2} = 1$$

$$= k\, x_i \big(x_1^2 + \cdots + x_n^2\big)^{-\frac{r}{2}}$$

$$= \frac{k\, x_i}{|\vec{x}|^r}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\nabla\phi = \frac{k\,\vec{x}}{|\vec{x}|^r}}}.$$



Eksempel 2: Finn en potensialfunksjon for

$$\vec{F}(x,y,z) = (2xy^2z^2 + z,\ 2x^2yz^2,\ 2x^2y^2z + x)$$

Hva blir $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, når C er kurven

$\vec{r}(t) = (\cos t,\ \sin t,\ t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

Løsning: Vi må løse

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy^2z^2 + z \Rightarrow \phi(x,y,z) = x^2y^2z^2 + zx + C(y,z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2x^2yz^2 \Rightarrow \phi(x,y,z) = x^2y^2z^2 + D(x,z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 2x^2y^2z + x \Rightarrow \underbrace{\phi(x,y,z) = x^2y^2z^2 + xz + E(x,y)}$$

Må bli like. Får til dette hvis vi setter $C(y,z) = E(x,y) = 0$, $D(x,z) = xz$.

$\vec{r}(a) = \vec{r}(0) = (1,0,0)$
$\vec{r}(b) = \vec{r}(2\pi) = (1,0,2\pi)$

Vi får da $\phi(x,y,z) = x^2y^2z^2 + xz$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \phi(\vec{r}(b)) - \phi(\vec{r}(a)) = \phi(1,0,2\pi) - \phi(1,0,0)$$
$$= 1^2\cdot 0^2\cdot(2\pi)^2 + 1\cdot 2\pi - 1^2 0^2 0^2 - 1\cdot 0 = 2\pi$$

Annen måte å vise at er konservativt:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 4xyz^2 \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 4xyz^2$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = 4xy^2z + 1 \qquad \frac{\partial F_3}{\partial x} = 4xy^2z + 1$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = 4x^2yz \qquad \frac{\partial F_3}{\partial y} = 4x^2yz.$$

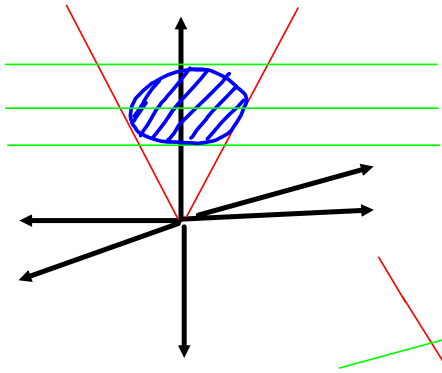
3.6 Kjeglesnitt

$z = \sqrt{x^2+y^2}$

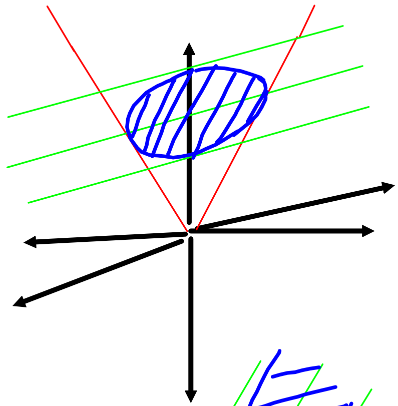
Kurver som oppstår når et plan skjærer en kjegle i rommet

4 typer skjæringer:

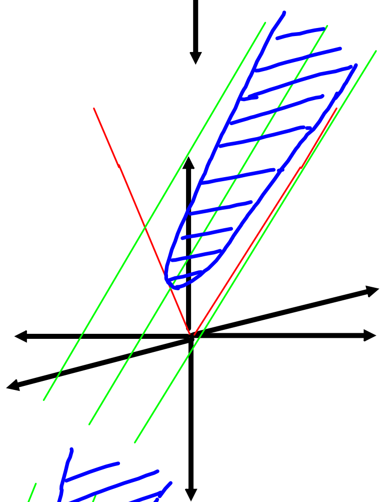
1) Flatt plan. Sirkel.



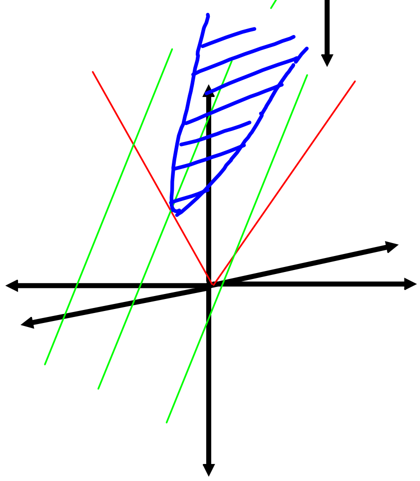
2) Skrått plan (ellipse)



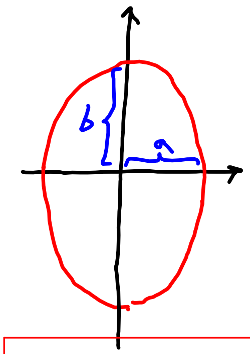
3) Plan parallelt med kjeglen (parabel)



4) Enda brattere plan (hyperbel)



Likningen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ kalles for <u>standardlikningen</u> for en ellipse. a og b kalles <u>halvakser</u>. Den største av dem kalles for <u>store halvakse</u>.



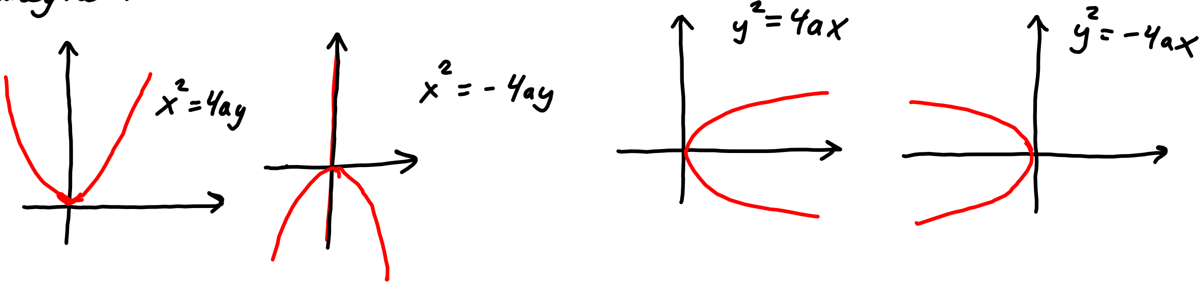
Skjæring med x-aksen: $(\pm a, 0)$

Skjæring med y-aksen: $(0, \pm b)$.

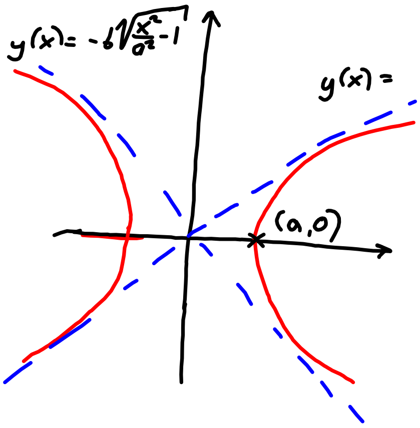
Kan parametriseres ved $\vec{r}(t) = (a\cos t, b\sin t)$. $0 \leq t \leq 2\pi$

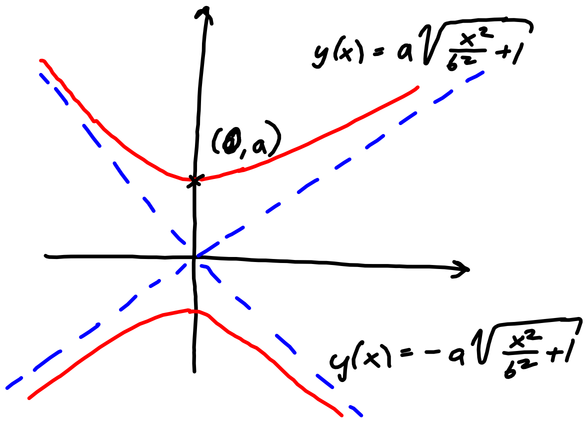
Likningene $x^2 = \pm 4ay$, $y^2 = \pm 4ax$ kalles for <u>standardlikninger</u> for en parabel. a kalles for <u>brennvidden</u>. Vi antar $a > 0$.

4 muligheter:



Likningen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ og $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ kalles <u>standardlikninger</u> for en hyperbel.





Parametrisering $\vec{r}(t) = (a\cosh t, b\sinh t)$ (så sin og cos fra ellipsen er byttet ut med sinh og cosh hyperbolicus.
(disse oppfyller $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$)

<u>Hyperbler har asymptoter $y(x) = \pm \frac{b}{a} x$:</u>

$$\lim_{x\to\infty} \left(b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1} - \frac{b}{a}x \right) = \frac{b}{a} \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-a^2} - x \right)$$

$$= \frac{b}{a} \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2-a^2} - x)(\sqrt{x^2-a^2} + x)}{\sqrt{x^2-a^2} + x}$$

$$= \frac{b}{a} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-a^2-x^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x} = \frac{b}{a} \lim_{x\to\infty} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x} = \underline{0}$$

Eksempel 1: $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$ har asymptoter $y(x) = \pm \frac{4}{2}x = \pm 2x$.

Vi plotter i matlab.

Translaterte varianter av standardlikningene:

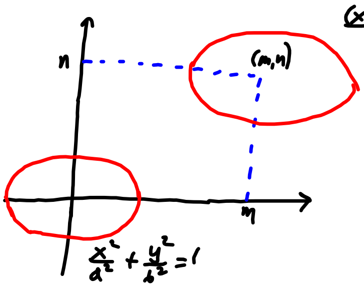
Ellipse: $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$

Parabel: $(x-m)^2 = 4a(y-n)$, $(y-n)^2 = 4a(x-m)$

Hyperbel: $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$, $\frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1$

(m,n) er sentrum i kjeglesnittet.

$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$



Typisk oppgave: Hva slags kjeglesnitt er beskrevet ved
$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$?

Løses ved å fullføre kvadratene

Eksempel 2: Hvilket kjeglesnitt er beskrevet ved
$x^2 + 4y^2 + 2x + 8y - 4 = 0$?

Løsning:
$x^2 + 2x \quad + 4y^2 + 8y = 4$

$x^2 + 2x + 1 \quad + 4(y^2 + 2y + 1) = 4 + 1 + 4$

$(x+1)^2 + 4(y+1)^2 = 9$

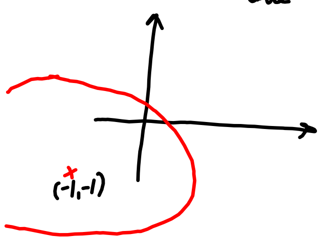
$\frac{(x+1)^2}{3^2} + \frac{(y+1)^2}{\frac{3^2}{2^2}} = 1$

$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$

$\frac{(x+1)^2}{3^2} + \frac{(y+1)^2}{(\frac{3}{2})^2} = 1$

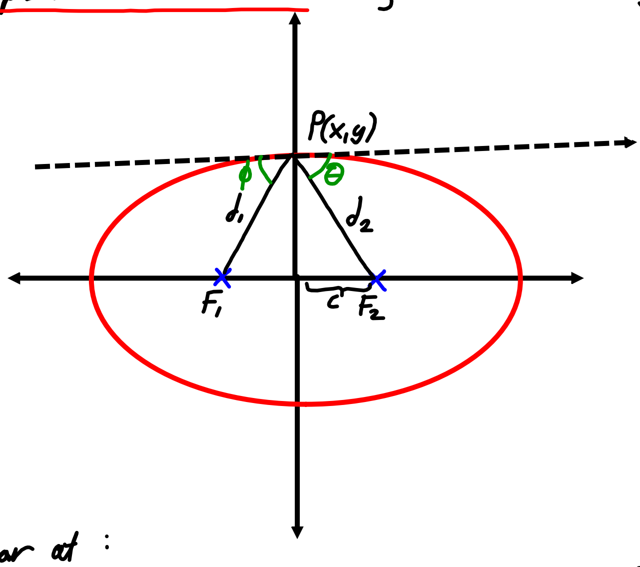
$x+1 = \overbrace{x-(-1)}^{x-m}$

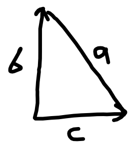
Dette er en ellipse med sentrum $(-1,-1)$, store halvakse $a=3$, lille halvakse $b = \frac{3}{2}$.



Geometriske egenskaper ved kjeglesnitt

Ellipse med $a > b$ (og sentrum i origo)





Vi har at:

1) En ellipse består av alle punkter P slik at $d_1 + d_2 = 2a$
c kalles for brennvidde ($c = \sqrt{a^2 - b^2}$)
$F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$ kalles brennpunkter.

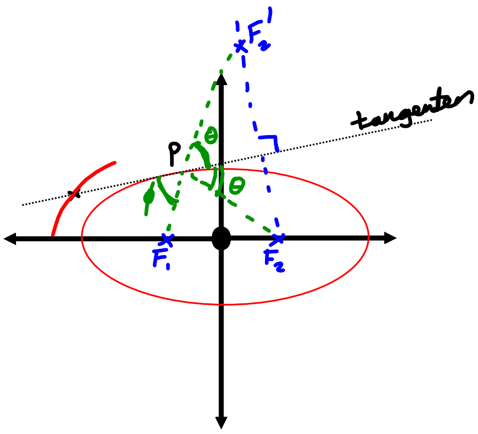
2) $\phi = \theta$ (refleksjonsegenskap).

Eksempel 2 igjen: Vi fant her en ellipse med sentrum $(-1,-1)$ halvakser $a=3$ og $b=\frac{3}{2}$.

Da er brennvidden $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3^2-(\frac{3}{2})^2}$
$=\sqrt{\frac{36-9}{4}}=\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$

Brennpunkter: $(m,n)\pm(c,0)=(-1,-1)\pm(\frac{3}{2}\sqrt{3},0)$
$=(-1\pm\frac{3}{2}\sqrt{3},-1)$

Merk: Hvis $a<b$, så får vi $F_1=(m,n)\pm(0,c)$, $c=\sqrt{b^2-a^2}$

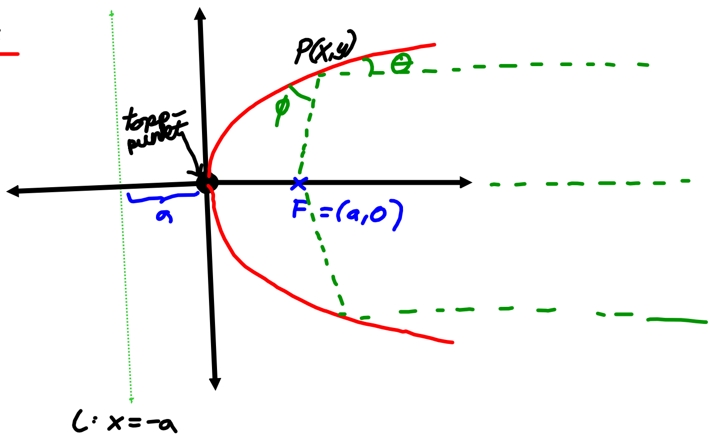


F_2' er F_2 speilet om tangenten

1. Ser at punktet P er det punktet på tangenten med kortest avstand fra F_1 til F_2 via tangenten.

2. Korteste avstand fra F_1 til F_2' er en rett linje.

Parabel:



F : Brennpunkt

a : brennvidde

Her er (0,0) toppunktet.

l : styrelinje

1. En parabel består av alle punkter P som er like langt fra l som fra $F=(a,0)$.
2. $\phi = \theta$ (refleksjonsegenskap)

Utledning av standardlikningen:

Vi krever at $|PF| = |Pl|$

$$|PF| = |(x,y)-(a,0)| = |(x-a,\, y)| = \sqrt{(x-a)^2+y^2}$$

$$|Pl| = |x-(-a)| = |x+a|$$

Vi løser:

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2} = |x+a|$$

$$(x-a)^2+y^2 = (x+a)^2$$

$$x^2-2ax+a^2+y^2 = x^2+2ax+a^2$$

$y^2 = 4ax$, som var standardlikningen.

Eksempel 3: En parabel har brennpunkt $(2,0)$, styrelinje $x=-4$.
Hva blir likningen for denne?

Løsning: Toppunktet er uansett like langt fra l og F:

$$\frac{2+(-4)}{2} = 1-2 = -1$$

Toppunkt: $(\overset{m}{-1},\overset{n}{0})$ (som også kalles senteret)

Ser også $a = \overset{\text{brenn.}}{2} - \overset{\text{topp.}}{(-1)} = 3$

Likningen blir

$$(y-n)^2 = 4a(x-m)$$

$$(y-0)^2 = 4\cdot 3\,(x-(-1))$$

$$y^2 = 12(x+1)$$