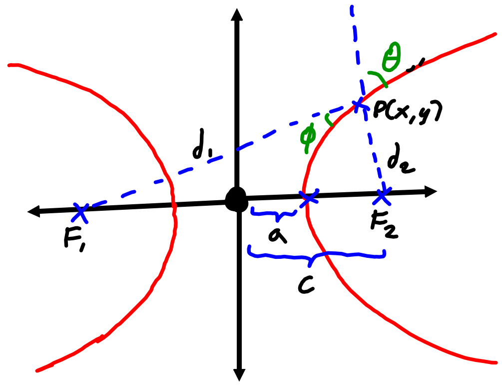
Oblig 1
Fredag: 1 time skrivekurs
Nye tider for fellesorakel
Ukesoppgaver

Hyperbler og geometrisk egenskap



1) En hyperbel består av alle punkter P slik at $|d_1 - d_2| = 2a$.
c kalles brennvidde, F_1, F_2 brennpunkter ($F_1 = (-c,0)$, $F_2 = (c,0)$)

2) $\phi = \theta$ (refleksjonsegenskap)

Vi har at $c = \sqrt{a^2+b^2}$, der a og b kommer fra standardlikningene
$\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right)$

Seksjon 3.7 Grafisk fremstilling av skalarfelt

For å danne oss et godt bilde av et skalarfeltet f:

1. Lage et grid av (x,y)-verdier i $\mathbb{R}^2$ (meshgrid)
2. Tegne nivåkurvene til f: $N_c = \{ (x,y) : f(x,y) = c \}$
3. Tegne tverrsnittene til f (skjæring med plan parallelle med xz-planet og yz-planet)

Eksempel 1: La $f(x,y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2}$. Finn nivåkurver og tverrsnitt. Plott.

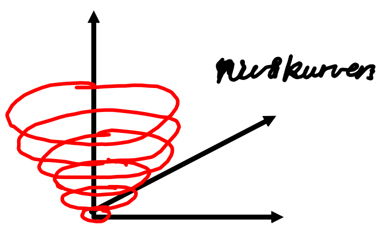
Løsning: Nivåkurver: $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = c \iff \frac{x^2}{(\underbrace{3\sqrt{c}}_{a})^2} + \frac{y^2}{(\underbrace{2\sqrt{c}}_{b})^2} = 1$

Dette er ellipser der store halvakse $= \frac{3}{2} \times$ lille halvakse

f kalles også for en ellipsoide.

Tverrsnitt: $x = c$: $z = \frac{c^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} \Rightarrow z - \frac{c^2}{3^2} = \frac{y^2}{2^2}$ parabel

$y = c$: $z = \frac{x^2}{3^2} + \frac{c^2}{2^2} \Rightarrow z - \frac{c^2}{2^2} = \frac{x^2}{3^2}$ parabel



Eksempel 2: $f(x,y,z) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} - z$

Nivåflater: $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} - z = c$

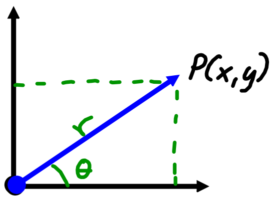
$$z = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} - c$$

Dette er ellipsoiden fra eksempel 1, translatert med c.

Plotting: contour3d i Python/Mayavi.
(se s. 304-306 i IN1900-boka).

Det finnes også andre koordinatsystemer:

Polarkoordinater:



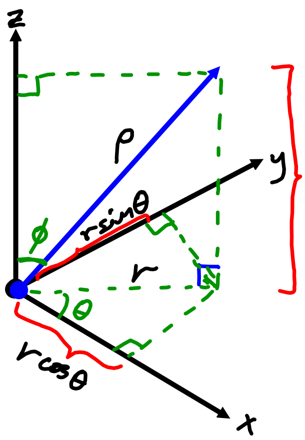
$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$
$\cos\theta = \frac{x}{r}$
$\sin\theta = \frac{y}{r}$

Eksempel 3: paraboloiden $f(x,y) = \underbrace{x^2+y^2}_{r^2}$ kan beskrives i polarkoordinater med $g(r,\theta) = r^2$

Sylinderkoordinater: r, θ, z.

<u>Kulekoordinater:</u> ρ, ϕ, θ



$r = \rho \sin\phi$
$z = \rho \cos\phi$

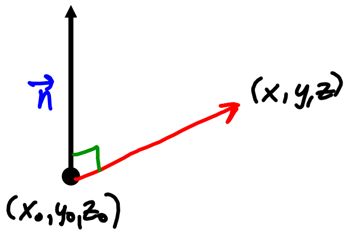
Ser at
$$x = r\cos\theta = \rho\cos\theta\sin\phi$$
$$y = r\sin\theta = \rho\sin\theta\sin\phi$$
$$z = \rho\cos\phi.$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$\cos\phi = \frac{z}{\rho}, \quad 0 \le \varphi \le \pi.$$

<u>Eksempel 4:</u> $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Nivåflatene blir kuler: ($x^2+y^2+z^2=\rho^2$ gir en kule med radius ρ).

Tangentplan og normalvektor

Plan gjennom (x_0, y_0, z_0) med normalvektor $\vec{n} = (a, b, c)$



$$\vec{n} \cdot \big((x,y,z) - (x_0,y_0,z_0) \big) = 0$$

$$(a,b,c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

$$ax + by + cz = \underbrace{\text{konstant}}_{ax_0 + by_0 + cz_0}$$

Ser: $f(x,y,z) = ax + by + cz$ har nivåflater som er parallelle plan, normalt på $\vec{n} = \nabla f = (a,b,c)$

Setning 3.7.8: Dette gjelder også mer generelt.

Hvis $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, så var $\underbrace{\text{lineariseringen}}_{\vec{F}(\vec{a}) + \vec{F}'(\vec{a})(\vec{x}-\vec{a})}$ til f i (x_0, y_0)

$$T_{(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \right) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0)$$

Tangentplanet til f er grafen til lineariseringen:

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0)$$

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,y + z = \text{konstant}$$

Derfor: $\vec{n} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \ -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), \ 1 \right)$ er normalvektor for tangentplanet.

Dette gjelder også mer generelt.

Seksjon 3.8 Grafisk fremstilling av vektorfelt.

Anta $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

quiver(x, y, u, v) tegner i hvert punkt $\overbrace{(x_i, y_i)}^{\vec{x}}$ vektoren $\overbrace{(u_i, v_i)}^{\vec{F}(\vec{x})}$.

quiver3 : Tilsvarende for $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Vi ser på feltet $\vec{F}(\vec{x}) = -\dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$

Tolkning av $\vec{F}$: $\vec{F}$ peker i retningen en væske strømmer.
væsken følger det som kalles en strømningslinje.
streamline i Matlab/Python