Skrivekurs

hjelp til å formidle det dere tenker

to skriveprosesser
- for dere selv (kladd)
- for andre (innføring)

Bruk "vi-form"

Ordbank

4 prinsipper:
- Påstand? → "Vi vil vise / finne / begrunne ...."
- Antagelse? → Vi antar, anta at....
- Argument?
- Konklusjon?

} så, dermed, vi får at, det følger at, derfor har vi...

① Vi har gitt $x_{n+1} = 40x_n + y_n$ og $y_{n+1} = 40y_n - x_n$ for $n = 0, 1, 2, \dots$
(vår - 18)
Begrunn at vi for $n = 0, 1, 2, \dots$ har
$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{der} \quad M = \begin{bmatrix} 40 & 1 \\ -1 & 40 \end{bmatrix}.$$

Kladd

Vil vise:
$$M = \begin{bmatrix} 40 & 1 \\ -1 & 40 \end{bmatrix}$$

antagelse
$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40x_n + y_n \\ 40y_n - x_n \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 40 & 1 \\ -1 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

matrise-mult.

Besvarelse:

Vi vil begrunne at for $n = 0, 1, 2, \dots$ har vi $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ der $M = \begin{bmatrix} 40 & 1 \\ -1 & 40 \end{bmatrix}$
gitt at $x_{n+1} = 40x_n + y_n$ og $y_{n+1} = 40y_n - x_n$ for $n = 0, 1, 2, \dots$ } intro

Anta at $x_{n+1} = 40x_n + y_n$ og $y_{n+1} = 40y_n - x_n$ for $n = 0, 1, 2, \dots$ } antagelse

La nå n være gitt.
Da har vi at
$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40x_n + y_n \\ 40y_n - x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 1 \\ -1 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$
så $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ der $M = \begin{bmatrix} 40 & 1 \\ -1 & 40 \end{bmatrix}$. } argumentasjon

Siden n er vilkårlig, gjelder dette for alle n. ■ } konklusjon

② Finn lineariseringen til $\vec{F}$ ....

Vi vil finne lineariseringen $T_{\vec{a}}\vec{F}$ til $\vec{F}$ gitt ved.... i punktet $\vec{a} = \ldots$

Vi må oppfylle:

$$T_{\vec{a}}\vec{F}(x,y) = \vec{F}(\vec{a}) + \vec{F}'(\vec{a})(\vec{x}-\vec{a})$$

Vi finner $\vec{F}(\vec{a})$:

.....

Vi finner $\vec{F}'(\vec{a})$:

.....

Det gir at

....

som er lineariseringen til $\vec{F}$ i $\vec{a}$.

[Ev. intro]

Struktur: 2a: Vi finner parametriseringen til de ulike banene:

I) Jordens bane rundt sola:

....

II) Månens bane rundt jorda:

....

III Månens bane rundt sola:

....

[Ev. konklusjon]

Kap. 4 Lineær algebra i $\mathbb{R}^n$

Hvordan løser vi et generelt system med m likninger og n ukjente?

Likningsform:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Matriseform: $m\times(n+1)$-matrisen
$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \right\}$$
$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{A}$ $\underbrace{\quad}_{\vec{b}}$

kalles også for utvidet matrise. Skriver $(A\ \vec{b})$

søyle $\longleftrightarrow$ ukjent / høyreside (x_i)
rad $\longleftrightarrow$ likning

Skal løse systemet systematisk ved hjelp av 3 typer radoperasjoner:

(i) Bytte om to rader
(ii) Gange en rad med et tall $\neq 0$
(iii) Legge en rad ganget med et tall til en annen rad.

Ide: Bruk (i)-(iii) til å lagen en "trapp" med 1-ere i "hjørnene":

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & b_1' \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & b_2' \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & b_3' \\ & & & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

Likningsform for dette:
$$1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + \cdots = b_1' \qquad x_1 = b_1'$$
$$0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + \cdots = b_2' \qquad x_2 = b_2',$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

slik at vi har løst systemet!

Vi sier at A og B er radekvivalente hvis B kan fås fra A ved våre tre radoperasjoner. Vi skriver da $A \sim B$.

Vi skriver også $A \overset{2\cdot I}{\sim} B$ hvis B fås fra A ved å gange rad 1 med 2.

Eksempel 1: Vi jobbe på likningsform:

$$\mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{III} \quad \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 15 \\ 2x_2 - x_3 = -4 \\ -3x_1 - 4x_2 - 11x_3 = -21 \end{cases}$$

$$\mathrm{II} + \mathrm{I} \quad \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 15 \\ -3x_1 - 4x_2 - 11x_3 = -21 \\ 2x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$$

$$\mathrm{III} - \mathrm{II} \quad \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 15 \\ 2x_2 - 2x_3 = -6 \\ 2x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \mathrm{I}/3 \\ \mathrm{II}/2 \end{matrix} \quad \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 15 \\ 2x_2 - 2x_3 = -6 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \mathrm{II} + \mathrm{III} \\ \mathrm{I} - 3\,\mathrm{III} \end{matrix} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_2 - x_3 = -3 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\mathrm{I} - 2\,\mathrm{II} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \end{matrix}$$

Derfor er løsningen $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$

På matriseform:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 15 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ -3 & -4 & -11 & -21 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{III}}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 15 \\ -3 & -4 & -11 & -21 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 15 \\ 0 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ledende enere

Merk:
1. Unik løsning
2. Søyle 1-3 har en "ledende ener" (kalles da for en pivotsøyle) søyle 4 er ikke pivotsøyle.
3. Rad 1-3 har ledende ener (kalles pivotrader)
4. Ingen unik måte å løse systemet på.

Ledende ener: Den første eneren i en rad (ser fra venstre)

Pivotrad: Rad med en ledende ener

Pivotsøyle: Søyle med en ledende ener

Eksempel 2:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 \quad\;\; + 4x_3 &= 2 \end{aligned}\right\} \text{likningsform}$$

$$\left.\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}\right\} \text{matriseform}$$

$$\underset{\sim}{II - 2I} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{II/2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{I + II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

På likningsform:
$$\begin{aligned} x_1 \quad + 2x_3 &= 1 \\ x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned} \implies \begin{aligned} x_1 &= 1 - 2x_3 \\ x_2 &= 1 - 3x_3 \end{aligned}$$

x_1, x_2 : kalles basisvariable

x_3 : kalles for en fri variabel

Merk:
1. Uendelig mange løsninger siden x_3 kan velges fritt.
2. Alle radene er pivotrader.
3. Søyle 1 og 2 var pivotsøyler, men søyle 3 og 4 var det ikke.

Eksempel 3:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \overset{II-I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 - x_2 &= 2 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 &= 1 \Leftrightarrow 0 = 1 \end{aligned}$$

Merk: 1. Systemet har ingen løsninger.
2. Alle radene er pivotrader
3. Første og siste søyle er pivotsøyler, men ikke søyle 2.

Definisjon 4.2.4 En matrise er på trappeform hvis
(i) Første ikke-null i enhver rad er en ener.
(ii) Enhver rad begynner med minst en null mer enn raden over

Fra eksempel 1:
$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 15 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ -3 & -4 & -11 & -21 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \cdots$$

trappeform.

Så matrisen radekvivalent med en matrise på trappeform.

Definisjon 4.3.1 En matrise er på redusert trappeform hvis
(i) den er på trappeform
(ii) Alle elementene i pivotsøylene er null, utenom pivotelementene.

Fra eksempel 1:
$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 15 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ -3 & -4 & -11 & -21 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

redusert trappeform.

Så matrisen er radekvivalent med en matrise på redusert trappeform også.

Setning: Enhver matrise er radekvivalent med en matrise på trappeform, og en på redusert trappeform

Den reduserte trappeformen er unik, og kan fåes med rref i Matlab.

	Eks. 1	Eks. 2	Eks. 3
$(A,\vec{b})$	$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 15 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ -3 & -4 & -11 & -21 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
$\text{rref}(A,\vec{b})$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Løsninger	En unik	Vendelig mange	Ingen
Pivotrader	alle	alle	alle
Pivotsøyler	alle unntatt siste	alle unntatt to siste	første og siste

Neste side: Dette gjelder mer generelt!

Setning 4.2.8 Hva pivotsøylene sier

Anta at vi radreduserer den utv. matrisen $(A, \vec{b})$ til en trappematrise

(i) Dersom siste søyle er en pivotsøyle, så har ikke systemet noen løsning (se eks. 3)

Dersom siste søyle ikke er en pivotsøyle:

(ii) Hvis alle andre søyler er pivotsøyler så har systemet en unik løsning (se eks. 1)

(iii) Hvis minst en av de andre søylene ikke er pivotsøyle, så har systemet uendelig mange løsninger (se eks. 2)

Spørsmål 1: Når har systemet en løsning for alle høyresider $\vec{b}$?

Svar 1: Alle radene i den (reduserte) trappeformen til A er pivotrader (eks. 1 og 2, men ikke eks. 3)

Spørsmål 2: Når har systemet en entydig løsning for alle høyresider $\vec{b}$?

Svar: Alle radene og søylene i A har pivotelementer. (eks. 1, men ikke 2 og 3).

Med andre ord: Kun kvadratiske systemer kan ha entydig løsning for alle valg av $\vec{b}$. Da er $\mathrm{rref}(A) = I_n$

Skisse av bevis:
1. Radreduser.
2. Hvis er rad i A ikke har pivotelement (bare nuller), sett inn siste søyle (der $\vec{b}$ skal være), slik at siste søyle blir pivotsøyle.
3. Radreduser baklengs.

En søyle uten pivotelement gir opphav til en fri variabel.

Seksjon 4.4

Systemet

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

kan også skrives

$A\vec{x} = \vec{b}$. Dette kalles en matriselikning.

$\vec{b} = \vec{0}$. Systemet kalles homogent. ($\vec{x} = \vec{0}$ alltid løsning unik hvis alle søyler er pivotsøyler (setning 4.2.8))

$\vec{b} \neq \vec{0}$. Systemet kalles inhomogent. (Hvis $\vec{x}_p$ løser $A\vec{x}_p = \vec{b}$, så vil enhver løsning av $A\vec{x} = \vec{b}$ kunne skrives $\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h$, der $A\vec{x}_h = \vec{0}$:

Sett $\vec{x} = \vec{x}_p + \underbrace{(\vec{x} - \vec{x}_p)}_{\vec{x}_h}$

$(A\vec{x}_h = A(\vec{x} - \vec{x}_p) = A\vec{x} - A\vec{x}_p = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$

Løse likningssystemer simultant:

$A\vec{x}_1 = \vec{b}_1$ $\qquad (A, \vec{b}_1) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \tilde{b}_{11} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \tilde{b}_{m1} \end{pmatrix}$

$\uparrow \vec{x}_1$

$A\vec{x}_2 = \vec{b}_2$ $\qquad (A, \vec{b}_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{12} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_{m2} \end{pmatrix} \underset{\text{samme radoperasjoner!}}{\sim \cdots \sim} \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \tilde{b}_{12} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \tilde{b}_{m2} \end{pmatrix}$

$\uparrow \vec{x}_2$

Derfor: $(A, \vec{b}_1, \vec{b}_2) := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & b_{m2} \end{pmatrix} \underset{\text{samme ops.}}{\sim \cdots \sim} \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & \tilde{b}_{m1} & \tilde{b}_{m2} \end{pmatrix}$

$\uparrow \vec{x}_1 \quad \uparrow \vec{x}_2$

Kan derfor løse $A\vec{x}_1 = \vec{b}_1$ og $A\vec{x}_2 = \vec{b}_2$ simultant!

Eksempel 1 igjen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & -11 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \\ -21 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Løs $A\vec{x}_1 = \vec{b}_1$, $A\vec{x}_2 = \vec{b}_2$, $A\vec{x}_3 = \vec{b}_3$ simultant.

Løsning:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} \multicolumn{3}{c|}{A} & \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ 3 & 6 & 9 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & -11 & -21 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{II \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 15 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & -11 & -21 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & -1 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{II + I} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{III - II} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\substack{I/3 \\ II/2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\substack{II + III \\ I - 3III}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$I - 2II \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\uparrow \vec{x}_1 \quad \uparrow \vec{x}_2 \quad \uparrow \vec{x}_3.$$

Seksjon 4.5 Inverse matriser

Definisjon: Hvis A er $n \times n$, så kalles A^{-1} den inverse matrisen til A dersom $AA^{-1} = I_n$, $A^{-1}A = I_n$.
Vi sier at A er inverterbar hvis A^{-1} eksisterer.

Merk:

1) Ikke sikkert A^{-1} finnes ($A = 0$)
2) A^{-1} er unik hvis den eksisterer: Hvis både X og Y er inverser, så:
$$X = I_n X = (YA)X = Y(AX) = Y I_n = Y.$$
3) Vi kan bruke A^{-1} til å løse systemer:
$$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \underbrace{A^{-1}(A\vec{x})}_{= (A^{-1}A)\vec{x} = I_n\vec{x} = \vec{x}} = A^{-1}\vec{b}, \quad \text{slik at } \vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Setning 4.5.4 Følgende er ekvivalente for en $n\times n$ matrise A:

(i) A er inverterbar

(ii) $A\vec{x} = \vec{c}$ har en entydig løsning for alle $\vec{c}$

(iii) A er radekvivalent med I_n

Bevis: (ii) $\leftrightarrow$ (iii): se spørsmål 1 og 2.

(i) $\to$ (ii): I lemma 4.5.2 bevist det at, hvis $AB = I_n$ så har $A\vec{x} = \vec{c}$ entydig løsning for alle $\vec{c}$. (ii) følger da ved å sette $B = A^{-1}$.

Bevis for lemma 4.5.2:

Sett $\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + \cdots + c_n\vec{b}_n$, der $\vec{b}_i$ er i'te søyle i B

Da er: $A\vec{x} = A(c_1\vec{b}_1 + \cdots + c_n\vec{b}_n)$

$= c_1 A\vec{b}_1 + \cdots + c_n A\vec{b}_n$

$\overset{AB = I_n,\ A\vec{b}_i = \vec{e}_i}{=} c_1\vec{e}_1 + \cdots + c_n\vec{e}_n = \vec{c}.$

Derfor: $A\vec{x} = \vec{c}$ har en løsning.

$\Rightarrow$ Alle radene i A er pivotrader (spørsmål 1)

$\Rightarrow$ Alle søyler i A er pivotsøyler

$\Rightarrow A\vec{x} = \vec{c}$ har entydig løsning (spørsmål 2)

(ii) $\to$ (i) Fra (ii) følger at $A\vec{x} = \vec{e}_i$ har entydig løsning $\vec{b}_i$: $A\vec{b}_i = \vec{e}_i$. Dermed er $AB = I_n$, der $B = (\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_n)$

Setning 4.5.3 sier at A er inverterbar hvis det finnes en B slik at $AB = I_n$ (hopper over beviset)

Derfor er A inverterbar ∎

Siden $AA^{-1} = I_n$, så kan vi finne søyle i i A^{-1} ved å løse $A\vec{x} = \vec{e}_i$

Observasjon: Hvis du radreduserer $(A, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ til $(I_n, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$, så er $A^{-1} = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$

Eksempel 1 igjen: $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & -11 \end{pmatrix}$ disse har vi fra før

$$\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & -11 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \vec{e}_2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \vec{e}_3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{3} & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Derfor er $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} & -5 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Seksjon 4.6: Lineærkombinasjoner og basiser

$\vec{b}$ kalles for en lineærkombinasjon av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ hvis det finnes skalarer $x_1, \dots, x_n$ slik at $\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n$

Merk: $A\vec{x} = \vec{b}$ er det samme som at $\vec{b}$ er lin. komb. av søylene $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ i A. Koeffisientene er $x_1, \dots, x_n$ (fra $\vec{x}$).

Eksempel 1 igjen: Vi fant
$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 15 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ -3 & -4 & -11 & -21 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$\vec{x}$

Derfor:
$$\begin{pmatrix} 15 \\ -4 \\ -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Definisjon: Spennet $Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ til $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ i $\mathbb{R}^m$ er mengden av alle vektorer som kan skrives som lineærkombinasjoner av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$

Merk: Hvis $Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \mathbb{R}^m$, så må $n \geq m$

For dette betyr at $A\vec{x} = \vec{b}$ har løsning for alle $\vec{b}$

$\Rightarrow$ alle rader i A er pivotrader

m = antall rader = antall pivotrader = antall pivotsøyler $\leq$ antall søyler $= n$,

så $m \leq n$.

Definisjon 4.6.5 $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ kalles lineært uavhengige hvis enhver $\vec{b} \in Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ kan skrives som en lineærkombinasjon av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ på en entydig måte.
Ellers kalles de lineært avhengige

Setning 4.6.6 / 4.6.7 Følgende er ekvivalent:

(i) $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige

(ii) $x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{0} \iff x_1 = \dots = x_n = 0$

(iii) i $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ så er alle søyler pivotsøyler.

Bevis: (i) $\Rightarrow$ (ii): $\Leftarrow$ Hvis $x_1 = \dots = x_n = 0$ så er $x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{0} + \dots + \vec{0} = \vec{0}$.

$\Rightarrow$ Hvis $x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{0}$ så er $A\vec{x} = \vec{0}$

Siden $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lin. uavh., så har $A\vec{x} = \vec{0}$ en entydig løsning $\vec{x}$. Siden $A\vec{0} = \vec{0}$, så må $\vec{x} = \vec{0}$, slik at $x_1 = \dots = x_n = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): (ii) sier at $A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$

Det er da ingen frie variable i systemet.

Alle søyler er da pivotsøyler.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Når alle søyler har pivotsøyler, så har $A\vec{x} = \vec{b}$ alltid en entydig løsning

$\Rightarrow \vec{b}$ kan skrives som lin. komb. av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ på en entydig måte $\Rightarrow \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ lin. uavh.

Merk 2: Hvis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige, så er $n \leq m$:
Siden A har alle søyler som pivotsøyler, så er:
n = antall søyler = antall pivotsøyler = antall pivotrader $\leq$ antall rader $= m$
så $n \leq m$.

Kombiner merk 1 og merk 2: Hvis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ utspenner $\mathbb{R}^m$ og er lin uavh)
så er $m = n$ (siden $n \leq m$, $n \geq m$).

Definisjon 4.6.12 En basis for $\mathbb{R}^n$ er en samling vektorer $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ som er lin. uavh og utspenner $\mathbb{R}^n$.

Merk: 1) Hvis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er en basis for $\mathbb{R}^n$, så er $A \sim I_n$.

2) Hvis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lin. uavh, eller $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ utspenner $\mathbb{R}^n$, så utgjør de en basis.