4.6 avslutningsvis:

Spørsmål 1: Hvis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er avhengige, hvordan kan vi finne en delmengde som er lineært uavhengig, og med samme spenn.

Svar: Radreduser $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$, og plukk ut søylene som blir forvandlet til pivotsøyler. (utplukket av disse har jo kun pivotsøyler)

Eks 2 igjen: Her var $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, og søyle 1 og 2 er pivotsøyler. Derfor er $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ lin. uavh. med samme spenn.

Spørsmål 2: Hvordan utvide $\overbrace{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n}^{\text{lin. uavh.}}$ (vektorer i $\mathbb{R}^m$) til en basis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}, \dots, \vec{a}_m$ for $\mathbb{R}^m$.

Svar:
1) Radreduser $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ til trappeform
2) "Sett inn" pivotsøyler slik at alle rader er pivotrader.
3) Radredusere baklengs for å finne $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}, \dots, \vec{a}_m$.

Eksempel 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{II-I \\ III-I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{III-II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) og 3) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{III+II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{II+I \\ III+I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3 \text{ (ny)}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$.

4,8 Elementære matriser

Matriser som fremkommer ved å gjøre en radoperasjon på I_m

Eks. 1 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ er den elementære matrisen som svarer til radoperasjonen $I + 2II$

Alle radoperasjon kan reverseres:

operasjon	invers operasjon
$I + II$	$I - II$
$2 \cdot I$	$\frac{1}{2} \cdot I$
$I \leftrightarrow II$	$I \leftrightarrow II$

Merk: a) Elementære matriser er inverterbare, og inversen er igjen elementær (svarer til inverse radoperasjon)

b) En radoperasjon på en (rektangulær) matrise svarer til å gange med den $\underbrace{\text{elementære matrisen}}_{\text{kvadratiske}}$ fra venstre.

Eks. 2 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{I+2II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Derfor: $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{elementær}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Setning 4.8.4 En $m \times n$ - matrise A kan skrives
$$A = E_1 E_2 \cdots E_k B$$
der
1. $B = \text{rref}(A)$
2. $E_1, \dots, E_k$ er elementære $(m \times m)$ - matriser

Bevis: $B = \text{rref}(A) = F_k \cdots F_2 F_1 A$

$F_k^{-1} B = F_{k-1} \cdots F_2 F_1 A$

$\vdots$

$F_1^{-1} F_2^{-1} \cdots F_k^{-1} B = A$

Setter $E_r = F_r^{-1}$ og får $A = E_1 \cdots E_k B$ ∎

Merk: Hvis A er inverterbar så er $B = I_n$, slik at $A = E_1 \cdots E_k$.

Eks. 3: Faktoriser $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ med elementære matriser:

Løsning:
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \overset{I \leftrightarrow II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{II - 2I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \overset{II \cdot (-\frac{1}{12})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{I - 8II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} \end{pmatrix} \quad F_4 = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Derfor: $A = E_1 E_2 E_3 E_4 = \underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

4.9 Determinanter

Defineres induktivt ved å "utvikle" langs første rad i A:

minorer

Eks. 4:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{NB!}}{-} 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(0\cdot 1 - 2\cdot 3) - 2(3\cdot 1 - 0\cdot 2) + 4(\cdot 3\cdot 3 - 0\cdot 0)$$

$$= -6 - 6 + 36 = \underline{24}$$

Teorem 4.9.10 La A være en kvadratisk matrise

(i): Hvis A er øvre/nedre triangulær (elementene over eller under diagonalen er 0), så er determinanten lik produktet av diagonalelementene.

(ii): Bytter vi om to rader i A, så ganges determinanten med -1.

(iii): Ganger vi med en rad med s, så ganges determinanten med s.

(iv): Adderer vi et tall ganget med en rad til en annen rad, så endres ikke determinanten.

Bevis for (i):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{def.}}{=} a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{triangulær}} - a_{12}\begin{vmatrix} 0 & a_{13} & \cdots \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} 0 & a_{22} & \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & & \end{vmatrix} \cdots$$

kan anta at dette er $a_{22}\cdots a_{nn}$ (induksjon)

alle har nullsøyle f

disse determinantene er 0 (se i boka)

$$= a_{11}(a_{22}\cdots a_{nn}) = a_{11}\cdots a_{nn} \quad \blacksquare$$

Det følger også:

gange en rad med s : $\det E = s$

radbytte : $\det E = -1$

legge en rad til en annen : $\det E = 1$.

Eks. 3 igjen: Vi fant at

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}}_{-12} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{1}$$

endrer determinanten med

Derfor: $\det(A) = (-1)(1)(-12)(1) = \underline{12}$

kontrollsjekk: $\det(A) = 2\cdot 8 - 1\cdot 4 = 16 - 4 = \underline{12}$

Teorem 4.9.12 Følgende er ekvivalent for A (kvadratisk)

(i) $\det(A) \neq 0$
(ii) A er inverterbar
(iii) $A\vec{x} = \vec{b}$ har entydig løsning for alle valg av $\vec{b}$
(iv) $A\vec{x} = \vec{0}$ har kun løsningen $\vec{x} = \vec{0}$
(v) Søylene i A er en basis for $\mathbb{R}^n$
(vi) A er radekvivalent med I_n.

Bevis: (i) $\Leftrightarrow$ (vi) (vi) er det samme som at $\mathrm{rref}(A) = I_n$.

$\Updownarrow$

A er et produkt av elementære matriser.

$\Updownarrow$

$\det(A) \neq 0$ (siden elementære matriser ikke kan nulle ut determinanten)

Setning 4.9.16 For alle $n \times n$-matriser gjelder at $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Bevis: Anta A ikke er inverterbar. Lemma 4.9.15 sier at AB er da heller ikke inverterbar.

Da får vi:
$$\left.\begin{aligned} \det(AB) &= 0 \\ \det(A)\cdot\det(B) &= 0\cdot\det(B) = 0 \end{aligned}\right\} \text{like!}$$

Anta A er inverterbar: Skriv $A = E_1 \cdots E_k$ (elementære).

$$\left.\begin{aligned} \det(AB) &= \det(E_1 \cdots E_k B) = \det(E_1)\cdots\det(E_k)\det(B) \\ \det(A)\det(B) &= \det(E_1 \cdots E_k)\det(B) = \det(E_1)\cdots\det(E_k)\det(B) \end{aligned}\right\} \text{like!}$$

■

Det følger at $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Man kan også utvikle determinanten langs andre søyler og rader.

Bruker et fortegnsskjema:
$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & & & \vdots & \end{pmatrix}$$

Lurt å utvikle langs en rad/søyle med mange nuller.

Eks. 4 igjen:

langs andre rad
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \overset{-}{-3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{+}{+0}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{-}{-2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= -3(2-12) + 0 - 2\cdot 3 = 30 - 6 = \underline{24}$$

langs første søyle
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \overset{+}{+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{-}{-3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{+}{+0}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 1\cdot(0-6) - 3(2-12) + 0 = -6 + 30 = \underline{24}$$