Seksjon 4.10 Egenvektorer og egenverdier

Definisjon: En vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ kalles en egenvektor for A $(n \times n)$ hvis det finnes en $\lambda \in \mathbb{R}$ slik at $A\vec{x} = \lambda \vec{x}$.
λ kalles den tilhørende egenverdien til $\vec{x}$.

Eks. 1 Speiling om linjen $x = 0$. Hva blir matrisen? Egenverdier/vektorer?

Løsning: Denne er lineær: $\vec{e}_1 \to -\vec{e}_1$, $\vec{e}_2 \to \vec{e}_2$, slik $A = (T\vec{e}_1, T\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ser at $\vec{e}_1$ er en egenvektor med egenverdi $\lambda_1 = -1$.
Ser at $\vec{e}_2$ er en egenvektor med egenverdi $\lambda_2 = 1$.

Finne disse generelt:

$$A\vec{x} = \lambda \vec{x} \iff \underbrace{(\lambda I_n - A)\vec{x} = \vec{0}}_{\text{har løsning } \vec{x} \neq \vec{0}} \iff \underbrace{\det(\lambda I_n - A)}_{\text{kalles } p_A(\lambda)\text{, det karakteristiske polynomet til } A.} = 0.$$

Metode:
1) Løs $p_A(\lambda) = 0$ for λ
2) Finn $\vec{x}$ ved å radredusere $\lambda I_n - A$.
$\vec{x}$ er da egenvektor for A med egenverdi λ.

Eks. 1 igjen: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda I_2 - A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$

$\det(\lambda I_2 - A) = (\lambda+1)(\lambda-1) = p_A(\lambda)$.

$\det(\lambda I_2 - A) = 0 \iff \lambda_1 = -1$ eller $\lambda_2 = 1$.

Egenvektor for $\lambda_1 = -1$:

$$-I_2 - A = \begin{pmatrix} -1+1 & 0 \\ 0 & -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \end{array}$$

x_2 pivotsøyle.
x_1 fri variabel,
$x_2 = 0$

generell egenvektor: $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

spesiell egenvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Egenvektor for $\lambda_2 = 1$:

$$I_2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pivotsøyle

$x_1 = 0$
x_2 fri variabel.

generell egenvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

spesiell egenvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eks. 2 Egenvektorer/verdier for $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Løsning: $\det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ -4 & \lambda-2 & 0 \\ \underset{+}{0} & \underset{-}{0} & \underset{+}{\lambda-3} \end{vmatrix} = 0 \cdot |\cdots| - 0 \cdot |\cdots| + (\lambda-3) \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -4 & \lambda-2 \end{vmatrix}$

$= (\lambda-3)\left((\lambda-2)^2 - 4\right) = (\lambda-3)(\lambda^2 - 4\lambda)$
$= \lambda(\lambda-3)(\lambda-4)$

Egenverdier: $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 4$

Egenvektor for $\lambda_1 = 0$:

$0I_3 - A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

søyle 1 og 3 er pivotsøyler, x_2 er fri variabel

$x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}x_2$

$x_3 = 0.$

generell egenvektor: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

spesiell egenvektor: $x_2 = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Egenvektor for $\lambda_2 = 3$:

$3I_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

søyle 1 og 2: pivotsøyler. x_3 fri variabel. $x_1 = 0,\ x_2 = 0$

generell egenvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Spesiell egenvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Egenvektor for $\lambda_3 = 4$:

$4I_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x_1 = \frac{1}{2}x_2$
$x_3 = 0$
x_2 fri.

pivotsøyle: 1 og 3.

generell egenvektor: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

spesiell egenvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Seksjon 4.11 Praktiske anvendelser

Eks. 3 x_n: antall syke etter n dager

y_n: antall friske etter n dager.

Antagelser: 1) 1000 mennesker (s.a. $x_n + y_n = 1000$ alle n)

2) Hvis en er syk i dag, så er det 40% sjanse for at også syk i morgen.

3) Hvis en er frisk i dag, så er det 20% sjanse for at er syk i morgen.

a) Finn en overgangsmatrise A slik at $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

Løsning: Vi har at

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \underbrace{0.4x_n}_{\text{syke dager før}} + \underbrace{0.2y_n}_{\text{friske dager før.}} \\ y_{n+1} &= 0.6x_n + 0.8y_n \end{aligned} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}}_{A.} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

b) Hva er egenvektorer/verdier for A?

Løsning: $\det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 0.4 & -0.2 \\ -0.6 & \lambda - 0.8 \end{vmatrix} = (\lambda - 0.4)(\lambda - 0.8) - 0.12$

$= \lambda^2 - 1.2\lambda + 0.32 - 0.12 = \lambda^2 - 1.2\lambda + 0.2$

$\lambda^2 - 1.2\lambda + 0.2 = 0$: $\lambda = \frac{1.2 \pm \sqrt{1.44 - 0.8}}{2} = \frac{1.2 \pm 0.8}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 0.2 \quad \lambda_2 = 1$

Egenvektor for $\lambda_1 = 0.2$:

$0.2 I_2 - A = \begin{pmatrix} -0.2 & -0.2 \\ -0.6 & -0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad x_1 = -x_2$, x_2 fri variabel

egenvektor $\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{spesiell egenvektor.}}$

Egenvektor for $\lambda_2 = 1$:

$I_2 - A = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.2 \\ -0.6 & 0.2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad x_1 = \frac{1}{3}x_2$, x_2 fri

egenvektor $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

spesiell egenvektor for $x_2 = 3$ blir $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) Hvis alle er friske på dag 0 ($x_0 = 0$, $y_0 = 1000$), finn et uttrykk for x_n og y_n.

Løsning: Skriv $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix}$ som en lineær kombinasjon av egenvektorer:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1000 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1000 \\ 0 & 4 & 1000 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1000 \\ 0 & 1 & 250 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 250 \\ 0 & 1 & 250 \end{pmatrix},$$

slik at $\begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix} = 250\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 250\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots = A^n \underbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix}}$$

$$= A^n\left(250\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 250\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 250A^n\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 250A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= 250(\lambda_1)^n\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 250(\lambda_2)^n\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= 250 \cdot (0.2)^n\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 250 \cdot 1^n\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 250\begin{pmatrix} 1 - (0.2)^n \\ 3 + (0.2)^n \end{pmatrix}$$

når $n \to \infty$ går dette mot $250\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 750 \end{pmatrix}$, s.a. 25% er syke i det lange løp.