MAT 1110 Obligatorisk oppgave 1 av 2

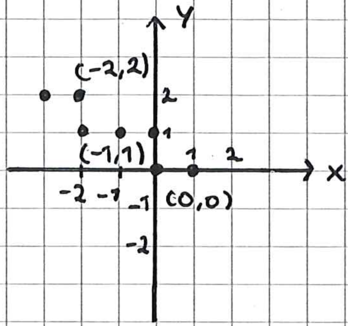
[redacted]

oppgave 1

a) Affine avbildningen : $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

speiler ethvert punkt i planet om punktet $(-1,1)$. Vil finne :

A : 2x2-matrise
c : vektor
slik at :
$T(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c$ foralle $x, y \in \mathbb{R}$



Fin tegning ☺

$T(0,0) = A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c$

$c = (-2,2)$ R

$e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$

speiler e_1 om $(-1,1)$, det gir punktet $(-3,2)$

speiler e_2 om $(-1,1)$, det gir punktet $(-2,1)$

$T(e_1) = (-3,2)$, $T(e_2) = (-2,1)$ R

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = Ae_1 + c = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = Ae_2 + c = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$T(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ R

Supert

b)

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - 2xy \\ y^2 + 2xy \end{pmatrix}$$ Vil finne lineariseringen T_aF til $F(x,y)$.

$a = (-1,1)$

R $$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-2y & -2x \\ 2y & 2y+2x \end{pmatrix}$$

R $$F'(-1,1) = \begin{pmatrix} 2\cdot(-1)-2\cdot 1 & -2\cdot(-1) \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 1 + 2\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

R $$F(-1,1) = \begin{pmatrix} (-1)^2 - 2\cdot(-1)\cdot 1 \\ 1^2 + 2\cdot(-1)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$T_aF\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F(a) + F'(a)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a\right)$ blir oppfylt ved:

$$T_aF\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4x - 4 + 2y - 2 \\ 2x + 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 - 4 - 2 - 4x + 2y \\ -1 + 2 + 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 - 4x + 2y \\ 1 + 2x \end{pmatrix}$$

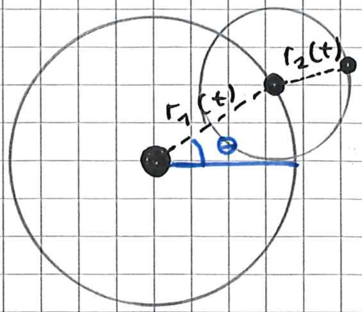
Lineariseringen blir:

$$T_aF\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 - 4x + 2y \\ 1 + 2x \end{pmatrix}$$ R

Bra!

Oppgave 2

a)



skal finne et uttrykk for jordas bane i forhold til sola, $r_1(t)$

$r_1(t)$ kan uttrykkes ved vinkel θ, hvor $\cos\theta$ gir oss x-verdien og $\sin\theta$ gir oss y-verdien. θ er uttrykt ved $\frac{2\pi}{T_j} \cdot t$ og er lik 0 ved x-aksen. $\theta = \frac{2\pi}{T_j} \cdot t$ kommer av at jorda følger en perfekt sirkel-bevegelse, som har omløp 2π. Ved å dele 2π på tiden det tar for et helt omløp og multipliserer det med tiden, t, får vi et uttrykk for vinkelen. For å få riktig lengde på vektoren ganger vi uttrykket med r_j. Dermed blir:

$$r_1(t) = r_j \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T_j} \cdot t\right), \sin\left(\frac{2\pi}{T_j} t\right)\right)$$

Flott!

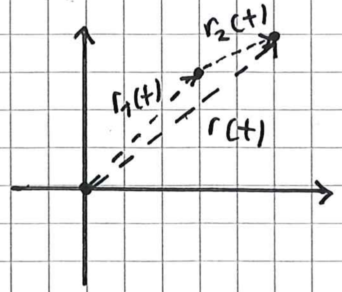
Samme prinsipp gjelder når vi skal finne et uttrykk for månens bane i forhold til jorda, $r_2(t)$. Her er tiden for et omløp T_m og lengden på vektoren r_m. Dermed blir:

$$r_2(t) = r_m \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T_m} t\right), \sin\left(\frac{2\pi}{T_m} t\right)\right)$$

Månens bane i forhold til sola kan parametriseres ved:

$$r(t) = \begin{pmatrix} r_j \cos(2\pi t/T_j) + r_m \cos(2\pi t/T_m) \\ r_j \sin(2\pi t/T_j) + r_m \sin(2\pi t/T_m) \end{pmatrix}$$

Fra vektor regning vet vi at $r(t)$ kan uttrykkes ved $r_1(t) + r_2(t)$



$$r(t) = r_1(t) + r_2(t)$$

$$= \begin{pmatrix} r_j \cos(\frac{2\pi}{T_j} t) \\ r_j \sin(\frac{2\pi}{T_j} t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_m \cos(\frac{2\pi}{T_m} t) \\ r_m \sin(\frac{2\pi}{T_m} t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r_j \cos(\frac{2\pi}{T_j} t) + r_m \cos(\frac{2\pi t}{T_m}) \\ r_j \sin(\frac{2\pi}{T_j} t) + r_m \sin(\frac{2\pi}{T_m} t) \end{pmatrix}$$

Bra!

Har dermed forklart at månens bane i forhold til sola kan parametriseres ved $r(t)$.

b) Denne oppgaven løste jeg i Python.

Kommentar til plottet:

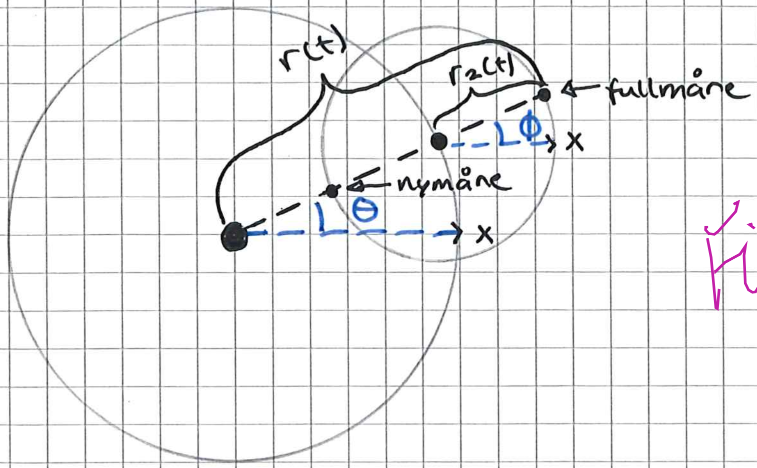
De to kurvene kan ikke adskilles i plottet. Det kan forklares med at avstanden mellom jorda og månen er veldig liten i forhold til avstanden fra sola til månen og sola til jorda. Med andre ord blir avstanden mellom sola og jorda tilnærmet lik avstanden mellom sola og månen. Man klarer heller ikke å gjenkjenne "syklobevegelsene", men når man plotter banen til månen rundt sola kan man observere at den ikke er en perfekt sirkel. Den går i bølger.

Bra!

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Thu Jan 30 11:02:48 2020

[redacted]
"""
#oppgave 2 b) i den obligatoriske oppgaven
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

y_list=[]
x_list=[]

#lager liste for x- og y-verdier til jordas bane rundt sola (r_1(t))
for t in range(0,365,1):
    x=150*np.cos(((2*np.pi)/365)*t)
    x_list.append(x)
    y=150*np.sin(((2*np.pi)/365)*t)
    y_list.append(y)

i_list=[]
j_list=[]

#lager liste for x- og y-verdier til månens bane rundt sola (r(t))
for t in range(0,365,1):
    i=150*np.cos(((2*np.pi)/365)*t)+0.384*np.cos(((2*np.pi)/27.3)*t)
    i_list.append(i)
    j=150*np.sin(((2*np.pi)/365)*t)+0.384*np.sin(((2*np.pi)/27.3)*t)
    j_list.append(j)

#plotter x- og y-verdiene mot hverandre
plt.plot(x_list,y_list) #r_1(t)
plt.plot(i_list,j_list) #r(t)
plt.show()

"""
Terminal>pyhton oblig1_2b.py
Kan se plottene i treminalen
"""
```

Supert

c)



Fin tegning!

Ved fullmåne er vinkelen mellom x-aksen og r(t), Θ, og vinkelen mellom x-aksen og $r_2(t)$, Φ like

Mens ved nymåne er vinkelen mellom x-aksen og r(t), Θ, og vinkelen mellom x-aksen og $r_2(t)$ addert med π (et halvt omløp) like

Bra!

For å få med at det er flere tidspunkt hvor det er fullmåne og nymåne må det legges til $2\pi k$ i uttrykkene.

Fullmåne:

$$\frac{2\pi}{T_m}t = \frac{2\pi}{T_j}t + 2\pi k$$

$k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{2\pi}{T_m}t - \frac{2\pi}{T_j}t = 2\pi k$$

$$t = \frac{2\pi k}{\frac{2\pi}{T_m} - \frac{2\pi}{T_j}} = \frac{k}{\frac{1}{T_m} - \frac{1}{T_j}}$$

R

Nymåne:

$$\frac{2\pi}{T_m}t = \frac{2\pi}{T_j}t + \pi + 2\pi k$$

$$\frac{2\pi}{T_m}t - \frac{2\pi}{T_j}t = \pi(1+2k)$$

$$t = \frac{\pi(1+2k)}{\frac{2\pi}{T_m} - \frac{2\pi}{T_j}} = \frac{1+2k}{\frac{2}{T_m} - \frac{2}{T_j}}$$

R

Supert

For å finne tidsforskjellen mellom to fullmåner, synodisk omløpstid setter jeg inn $k=0$ og $k=1$ i uttrykket for t som gir fullmåner. Deretter finner jeg differansen mellom de to t-verdiene.

$$t = \frac{k}{\frac{1}{T_m} - \frac{1}{T_j}} = \frac{k}{\frac{1}{27.3} - \frac{1}{365}}$$

$k=0$

$$t = \frac{0}{\frac{1}{27.3} - \frac{1}{365}} = 0$$

$k=1$

$$t = \frac{1}{\frac{1}{27.3} - \frac{1}{365}} = 29{,}5$$

Differansen:

$29{,}5 - 0 = 29{,}5$ R

Synodisk omløpstid er 29,5 døgn.

Siderisk omløpstid er 27,3 (oppgitt i oppg.) døgn.

$29{,}5 > 27{,}3$

dermed er synodisk omløpstid størst

Dette gir mening i og med at månen bruker 27,3 døgn for å få samme vinkel i forhold til jorda. På den tiden har vinkelen mellom jorda og sola endret seg litt. Så da bruker månen litt over to dager for at de to vinklene skal bli like.

Kjempefint!

d) Hastighetsvektoren $v(t)$ finner jeg slik:

$$r(t) = \begin{pmatrix} r_j \cos(2\pi t/T_j) + r_m \cos(2\pi t/T_m) \\ r_j \sin(2\pi t/T_j) + r_m \sin(2\pi t/T_m) \end{pmatrix}$$

$$v(t) = r'(t) = \begin{pmatrix} -r_j \sin(2\pi t/T_j)\cdot 2\pi/T_j - \cancel{T_m}^{r_m} \sin(2\pi t/T_m)\cdot 2\pi/T_m \\ r_j \cos(2\pi t/T_j)\cdot 2\pi/T_j + r_m \cos(2\pi t/T_m)\cdot 2\pi/T_m \end{pmatrix}$$

Farten $|v(t)|$ finner jeg slik:

Denne utregningen er lang, derfor har jeg delt den opp

$$|v(t)| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$x^2 = (-r_j \sin(2\pi t/T_j)\cdot 2\pi/T_j - r_m \sin(2\pi t/T_m)\cdot 2\pi/T_m)^2$$

$$= r_j^2 \sin^2(2\pi t/T_j)\cdot 4\pi^2/T_j^2 + 2 r_j r_m \sin(2\pi t/T_j)\sin(2\pi t/T_m)\cdot 4\pi^2/T_j T_m$$
$$+ r_m^2 \sin^2(2\pi t/T_m)\cdot 4\pi^2/T_m^2$$

$$y^2 = (r_j \cos(2\pi t/T_j)\cdot 2\pi/T_j + r_m \cos(2\pi t/T_m)\cdot 2\pi/T_m)^2$$

$$= r_j^2 \cos^2(2\pi t/T_j)\cdot 4\pi^2/T_j^2 + 2 r_j r_m \cos(2\pi t/T_j)\cos(2\pi t/T_m)\cdot 4\pi^2/T_j T_m$$
$$+ r_m^2 \cos^2(2\pi t/T_m)\cdot \cancel{2}4\pi^2/T_m^2$$

Bruker identitetene

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ og $\cos(x-y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

R

$$|v(t)| = \sqrt{(4\pi^2/T_j^2)\cdot r_j^2 + (4\pi^2/T_m^2)\cdot r_m^2 + 2 r_j r_m \cdot (4\pi^2/T_j T_m)\cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_m}t - \frac{2\pi}{T_j}t\right)}$$

$$= \sqrt{6.675 + 0{,}456\cdot\cos(0{,}213\,t)}$$

Ser at det er uttrykket jeg tar cosinus av

og jeg vet at : $-1 \le \cos x \le 1$

Dermed har månen høyest hastighet når:

$0{,}213\,t = 0 + 2\pi k$

$t = 29.5\,k$

og månen har minst fart når:

$0{,}213t = \pi + 2\pi k$

$t = 14{,}7 + 29.5k$

Observerer at farten til månen er størst ved fullmåne og minst ved nymåne.

Kjempefint!