7. mai 2020

MAT1110

Obligatorisk oppgave 2 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 16. april, 2020, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) i god tid før innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Oppgaver

Oppgave 1. Regn ut flateintegralet

$$\iint_T x\, dS$$

der T er delen av sfæren $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ som ligger i første oktant $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Her lønner det seg å bruke kulekoordinater. I disse koordinatene skal ϕ og θ ligge i området

$$D = \{(\phi, \theta) | \phi \in [0, \pi/2], \theta \in [0, \pi/2]\}$$

For å regne ut flateintegralet, trenger vi flateelementet dS. Vi skriver

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = (a \sin\phi \cos\theta, a \sin\phi \sin\theta, a \cos\phi)\,.$$

Da får vi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= (-a \sin\theta \sin\phi, a \cos\theta \sin\phi, 0) \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} &= (a \cos\theta \cos\phi, a \sin\theta \cos\phi, -a \sin\phi) \end{aligned}$$

Kryssproduktet blir da

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \sin\theta \sin\phi & a \cos\theta \sin\phi & 0 \\ a \cos\theta \cos\phi & a \sin\theta \cos\phi & -a \sin\phi \end{vmatrix} \\ &= (-a^2 \cos\theta \sin^2\phi, -a^2 \sin\theta \sin^2\phi, -a^2 \sin\phi \cos\phi) \\ &= -a \sin\phi\, \mathbf{r}(\theta, \phi) \end{aligned}$$

Bruker vi at $|\mathbf{r}(\theta, \phi)| = a$, får vi

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right| = a^2 \sin\phi$$

og følgelig finner vi til slutt $dS = a^2 \sin\theta d\phi d\theta$.

Nå kan vi regne ut flateintegralet:

$$\begin{aligned}
\iint_T x dS &= \iint_D (a\cos\phi\sin\theta)a^2\sin\theta\, d\phi d\theta \\
&= a^3\iint_D \cos\phi\sin^2\theta d\phi d\theta \\
&= a^3\int_0^{\pi/2}\cos\phi\, d\phi\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\, d\theta \\
&= a^3\Big[\sin\phi\Big]_0^{\pi/2}\cdot\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\, d\theta \\
&= a^3\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos(2\theta)\, d\theta \\
&= \frac{a^3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^3}{4}
\end{aligned}$$

Oppgave 2. En dobbelt deriverbar funksjon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kalles *harmonisk* dersom den tilfredstiller *Laplace-likningen*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

a) Vis at funksjonene $x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ og $e^x\sin(y)$ er harmoniske.

b) Vis at dersom f er harmonisk, så er

$$\int_C \left(\frac{\partial f}{\partial y}dx - \frac{\partial f}{\partial x}dy\right) = 0$$

for alle enkle, lukkede, glatte kurver C i planet.

a)

Vi sjekker de dobbeltderiverte:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) = 12x^2 - 12y^2 = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(e^x\sin(y)) = e^x\sin(y) = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}(e^x\sin(y))$$

b)

La $P = \frac{\partial f}{\partial y}$ og $Q = -\frac{\partial f}{\partial x}$. Dersom R er området avgrenset av C, får vi ved Greens teorem,

$$\begin{aligned}
\int_C \left(\frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy \right) &= \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \\
&= \iint_R \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dxdy = 0
\end{aligned}$$

fordi $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Oppgave 3. La $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$ og la $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{5} \left(xy + y^2 - 1, x^3 - y^2 + 3 \right).$$

a) Vis at $\mathbf{F}$ definerer en funksjon $\mathbf{F} : A \to A$ (altså at verdiene til $\mathbf{F}$ ligger i A).

b) Vis at $\mathbf{F} : A \to A$ definerer en kontraksjon. (Hint: Setning 5.5.8 i boka (gjengitt nedenfor) kan bli nyttig her).

c) Vis at følgende likningsystem har en unik løsning for $-1 \leq x, y \leq 1$:

$$\begin{aligned}
5x &= xy + y^2 - 1 \\
5y &= x^3 - y^2 + 3.
\end{aligned}$$

d) Lag et MATLAB/python script som regner ut en approksimasjon til løsningen i c) ved hjelp av en iterasjon $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$. Programmet skal ta startpunkt $\mathbf{x}_0$ og antall iterasjoner som input. Legg ved et plott av følgene du får med startpunkt i $(0, 0)$ og $(-1, 1)$.

Setning 5.5.8 i FLVA. Anta at A er en ikke-tom, lukket, konveks delmengde i $\mathbb{R}^m$ og at $\mathbf{F} : A \to A$ er en avbildning som er deriverbar i A. Anta at det finnes et tall $C < 1$ slik at

$$\sqrt{|\nabla F_1(\mathbf{c}_1)|^2 + \cdots + |\nabla F_m(\mathbf{c}_m)|^2} \leq C$$

for alle punkter $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m \in A$. Da er $\mathbf{F}$ en kontraksjon og har et entydig fikspunkt. Vi kan iterere oss frem til fikspunktet ved å starte i et hvilket som helst punkt $\mathbf{x}_0 \in A$.

a)

Først: Sjekker at $(u, v) = \mathbf{F}(x, y) \in A$ for alle $(x, y) \in A$.

$$|u| = \left|\frac{1}{5}(xy + y^2 - 1)\right| \le \frac{1}{5}\left(|xy| + |y^2| + 1\right) \le \frac{3}{5}$$

og

$$|v| = \left|\frac{1}{5}(x^3 - y^2 + 3)\right| \le \frac{1}{5}\left(|x^3| + |y^2| + 3\right) \le 1$$

som er det vi skulle vise.

b)

For å vise at $\mathbf{F}$ er en kontraksjon ser vi på gradientene til komponentene:

$$\nabla F_1 = \frac{1}{5}(y, x + 2y), \quad \nabla F_2 = \frac{1}{5}(3x^2, -2y)$$

Fra dette finner vi

$$|\nabla F_1|^2 = \frac{1}{5^2}|(y, x + 2y)|^2 \le \frac{1}{25}(y^2 + (x + 2y)^2) \le \frac{1}{25}(1 + 3^2) = \frac{10}{25}.$$

$$|\nabla F_2|^2 = \frac{1}{5^2}|(3x^2, -2y)|^2 \le \frac{1}{25}(9x^4 + 4y^2) \le \frac{1}{25}(9 + 4) = \frac{13}{25}.$$

Dermed får vi

$$\sqrt{|\nabla F_1|^2 + |\nabla F_2|^2} \le \sqrt{\frac{10}{25} + \frac{13}{25}} = \sqrt{\frac{23}{25}} < 1.$$

Fra Setning 5.5.8 i FVLA vet vi at $\mathbf{F}$ er en kontraksjon.

c)

Fra a) vet vi at avbildningen $\mathbf{F}$ er en kontraksjon i $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Ved Banachs fikspunktteorem finnes det et entydig fikspunkt $\mathbf{x} \in A$ slik at $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Slike fikspunkter svarer nøyaktig til løsninger av likningssystemet, så det finnes derfor en entydlig løsning.

d)

Filen FF.m

```
function [u,v]=FF(x,y)
u = 1/5*(x.*y+y.^2-1);
v = 1/5*(x.^3-y.^2+3);
end
```

Filen iterasjon.m

```
function [x,y]=iterasjon(x0,y0,N)
x=zeros(1,N);
y=zeros(1,N);
x(1)=x0;
y(1)=y0;
for n=1:N-1
    [u v]=FF(x(n),y(n));
    x(n+1)=u;
    y(n+1)=v;
end
```

Kjører vi nå kommandoene

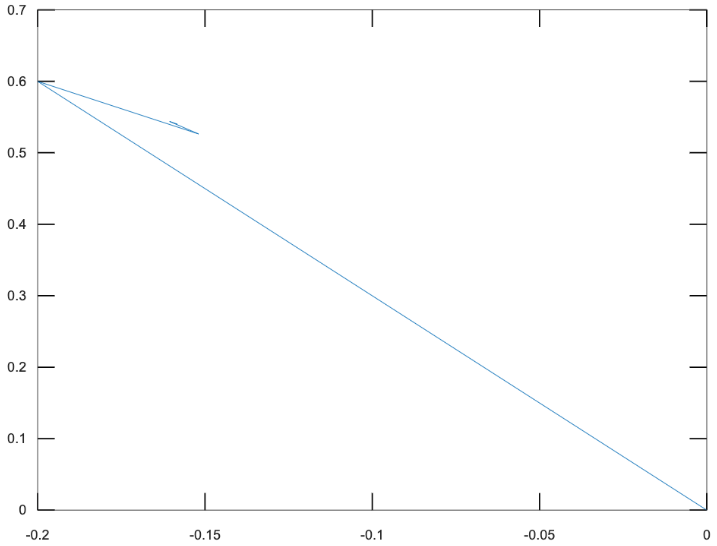
```
[x y]=iterasjon(0,0,100);
plot(x,y)
x(20)
y(20)
```

Får vi resultatet i Figur 3. Vi finner altså løsningen

$$\mathbf{x} \approx (-0.15868, 0.54072)$$

.

```
octave:5> iterasjon(0,0,10)
u = -0.15868
v =  0.54072
ans = -0.15868
```




```
octave:6> iterasjon(-1,1,10)
u = -0.15868
v =  0.54072
ans = -0.15868
```