UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1110 — Kalkulus og Lineær algebra

Eksamensdag: Lørdag 23. Mai 2020

Tid for eksamen: 10:00 – 16:00

Oppgavesettet er på 4 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Alle

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Settet består av 12 deloppgaver som alle teller like mye. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1

Vi skal se på ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &= 14 \\ -x_1 + 2x_2 &= a \\ 2x_1 + x_2 &= 7. \end{aligned}$$

a

For hvilke verdier av a har systemet en entydig løsning? For hvilke verdier av a har systemet ingen løsninger?

b

La $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Finn en vektor $\mathbf{v}_3$ slik at $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ utgjør en basis for $\mathbb{R}^3$.

Oppgave 2

Vis at feltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (3y^2z^3, 6xyz^3 + z, 9xy^2z^2 + y)$$

er konservativt, og skriv ned en potensialfunksjon $\phi(x, y, z)$.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3

Vi skal se på funksjonen $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 + 2z^2, 2x^2 + z^2, x^2 + y^2)$. Forklar at $\mathbf{F}$ har en omvendt funksjon $\mathbf{G}$ definert i en omegn om $(3, 3, 2)$ slik at $\mathbf{G}(3, 3, 2) = (1, 1, 1)$, og finn $\mathbf{G}'(3, 3, 2)$.

Oppgave 4

Denne oppgaven inneholder programmering. Jeg har valgt den for prøveeksamen fremfor eksamen da den kanskje er litt mer programmeringsrettet enn det vi er vant med. Forvent en oppgave med programmering på eksamen, som ikke inneholder like mye kode. Matlab og Python er likestilt for dere på eksamen.

Vi skal modellere spredningen av et virus i Norge. Vi antar at befolkningen er 5.000.000, og at vi starter med 10 smittede. I en situasjon der ingen er immune antar vi at hver smittet person ved tidspunkt $t = n$ smitter $R = 1.2$ andre (som hverken er syke ellere immune), slik at disse er smittet ved tid $t = n + 1$. Vi antar også at smittede ved tid $t = n$ blir immune ved tid $t = n + 1$.

a

Forklar at

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n - \frac{Rx_n y_n \cdot 10^{-6}}{5} \\
y_{n+1} &= \frac{Rx_n y_n \cdot 10^{-6}}{5} \\
z_{n+1} &= z_n + y_n,
\end{aligned}
$$

der, ved tid $t = n$, x_n er antall personer som hverken er syke eller immune, y_n er antall syke, og z_n er antall immune. Forklar spesielt produktleddet $\frac{Rx_n y_n \cdot 10^{-6}}{5}$.

b

Forklar følgende kode, linje for linje (du kan velge selv om du forklarer Matlabkoden, eller Pythonkoden). Hvis du kjører koden vil du se at de tre kurvene som plottes flater ut på tre verdier. Gi din tolkning av dette.

```
population = 5000000;
smittede_start = 10;
R = 1.2;
x_0 = [population-smittede_start; smittede_start; 0];
N = 100;
vals=zeros(3,N);
x(:,1)=x_0;

for k=2:N
    x(:,k) = F(x(:,(k-1)), R, population);
end
```

(Fortsettes på side 3.)

```
plot(1:N, x(1,:), 1:N, x(2,:), 1:N, x(3,:));
legend('ikke immune eller syke', 'syke', 'immune');

max(x(2,:))
100*x(3,N)/population

function y=F(x, R, population)
    smittede_nye = R*x(1)*x(2)/population;
    y=[x(1)-smittede_nye; smittede_nye; x(3)+x(2)];
end
```

```
from numpy import *
import matplotlib.pyplot as plt

def F(x, R, population):
    smittede_nye = R*x[0]*x[1]/population
    return array([x[0]-smittede_nye,smittede_nye, x[2]+x[1]])

population = 5000000
smittede_start = 10
R = 1.2
x_0 = array([population-smittede_start, smittede_start, 0])
N = 100
x = zeros((3,N))
x[:,0] = x_0


for k in range(1,N):
    x[:,k] = F(x[:,k-1], R, population)

plt.plot(arange(1,N+1), x[0,:], arange(1,N+1), x[1,:], arange(1,N+1), x[2,:])
plt.legend(['ikke immune eller syke', 'syke', 'immune'])
plt.show()

print(max(x[1,:]))
print(100*x[2,N-1]/population)
```

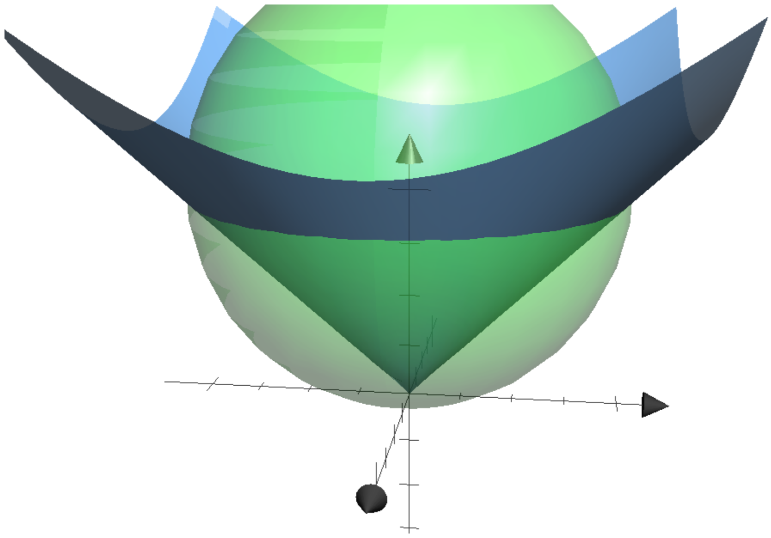
c

Koden over skriver tallene 78270 og 32.28 til skjerm. Hva sier disse tallene oss hvis 1% av alle syke havner på intensivavdeling, og det er 500 intensivplasser på sykehusene i Norge?

Oppgave 5

Regn ut volumet av området i $\mathbb{R}^3$ som er avgrenset av flaten gitt i kulekoordinater ved $\rho = 2\cos\phi$, og som ligger over kjeglen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Området er vist i Figur 1.

(Fortsettes på side 4.)



Figur 1: Området avgrenset av en kjegle og en flate

Oppgave 6

Finn konvergensområdet for rekken $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)4^n}$, og finn et uttrykk for summen.

Oppgave 7

Vi skal lage en container med et gitt volum V. Bunnen er dobbelt så dyr per kvadratmeter som de andre 5 sidene (topp og sider). Hvordan bør dimensjonene på containeren være for at containeren skal bli billigst mulig?

Oppgave 8

Regn ut dobbeltintegralet

$$\int_0^1 \int_{y^{1/3}}^1 \frac{\sin(\pi x^2)}{x^2} dxdy$$

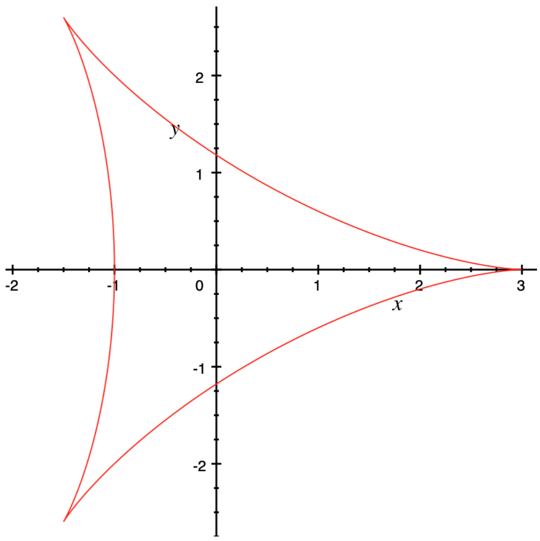
Hint: Her er det nok lurt å beskrive integrasjonsområdet på en annen måte.

Oppgave 9

Regn ut arealet avgrenset av kurven

$$\mathbf{r}(t) = (2\cos t + \cos(2t), 2\sin t - \sin(2t)),$$

der $0 \leq t \leq 2\pi$ (se Figur 2).



Figur 2: En kurve i planet

(Fortsettes på side 6.)