MAT1110: Obligatorisk oppgave 1

Innleveringsfrist: 13/2-2020, kl. 14:30

Oppgave 1
a) Vi skal se på den affine avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som speiler ethvert punkt i planet om punktet $(-1, 1)$. Finn en 2×2-matrise A og en vektor $\mathbf{c}$ som er slik at $T(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{c}$ for alle $x, y \in \mathbb{R}$.
Løsning: Vi har at $T(0, 0) = (-2, 2)$, slik at $\mathbf{c} = (-2, 2)$.
Vi har og at $T(1, 0) = (-3, 2)$ og $T(0, 1) = (-2, 1)$. Hvis $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ får vi dermed ligningene

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Den første ligningen gir $a_{11} = -1$, $a_{21} = 0$, mens den andre ligningen gir at $a_{12} = 0$, $a_{22} = -1$, slik at

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b) Finn lineariseringen $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}$ til funksjonen definert ved

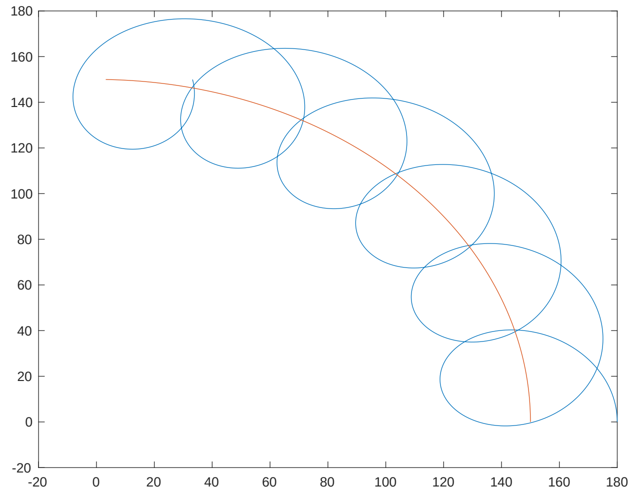
$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - 2xy \\ y^2 + 2xy \end{pmatrix}$$

i punktet $\mathbf{a} = (-1, 1)$.
Løsning: Vi har at

$$\mathbf{F}'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 2y & -2x \\ 2y & 2y + 2x \end{pmatrix},$$

slik at

$$\mathbf{F}'(-1, 1) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$



Figur 1: Jordas bane (i rødt) og månens bane (i blått) over tid.

Siden $\mathbf{F}(-1,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ så blir lineariseringen i $\mathbf{a}$

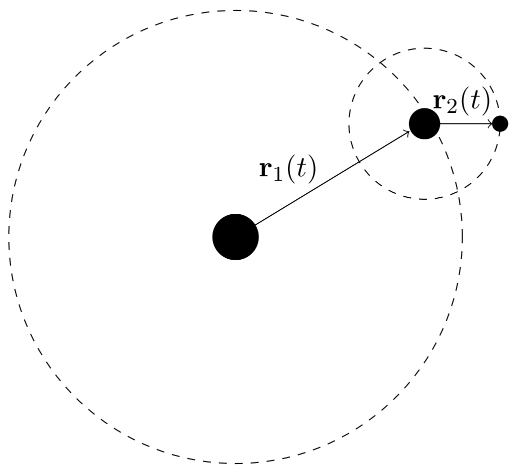
$$\begin{aligned} T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(x,y) &= \mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{F}'(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}) \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Oppgave 2

Jorda ligger omtrent $r_j = 150$ millioner km. fra sola, og bruker $T_j = 365$ dager på et omløp rundt sola. Månen ligger 384.000 km. fra jorda (Vi setter $r_m = 0.384$, slik at alle avstander måles i millioner km). Sett i forhold til stjernehimmelen bruker månen $T_m = 27.3$ dager på et omløp om jorda (også kalt *siderisk omløpstid*). I denne oppgaven skal vi anta at

- jorda følger en perfekt sirkelbevegelse rundt sola,
- månen følger en perfekt sirkelbevegelse rundt jorda,
- jordbanen og månebanen ligger begge i xy-planet.

(i praksis er ikke dette helt riktig). Figur 1 viser en forenklet tegning av jordas og månens bane i forhold til sola.



Figur 2: Jordas bane i forhold til sola ($\mathbf{r}_1(t)$), og månens bane i forhold til jorda ($\mathbf{r}_2(t)$).

a) Finn et uttrykk for jordas bane i forhold til sola (kall denne for $\mathbf{r}_1(t)$), og et uttrykk for månens bane i forhold til jorda (kall denne for $\mathbf{r}_2(t)$). Disse er illustrert i Figur 2. Forklar også at månens bane i forhold til sola kan parametriseres ved

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} r_j \cos(2\pi t/T_j) + r_m \cos(2\pi t/T_m) \\ r_j \sin(2\pi t/T_j) + r_m \sin(2\pi t/T_m) \end{pmatrix},$$

der tiden t måles i dager. Vi antar at

- sola er plassert i sentrum,
- jorda og månen ligger begge på den positive x-aksen ved $t = 0$, med månen lengst unna sola,
- både månen og jorda beveger seg mot klokka i sine baner.

Løsning: Jordas bane rundt sola kan parametriseres ved

$$\mathbf{r}_1(t) = r_j \begin{pmatrix} \cos(2\pi t/T_j) \\ \sin(2\pi t/T_j) \end{pmatrix}$$

(setter vi her inn $t = T_j$ så blir argumentet til cos og sin til 2π, slik at vi havner tilbake i utgangspunktet etter T_j dager). Sett fra jorda kan månens bane parametriseres ved

$$\mathbf{r}_2(t) = r_m \begin{pmatrix} \cos(2\pi t/T_m) \\ \sin(2\pi t/T_m) \end{pmatrix}.$$

Vi har at $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)$, og dette gir uttrykket i oppgaven.

b) Plott $\mathbf{r}_1(t)$ og $\mathbf{r}(t)$ i samme koordinatsystem, og over en periode på ett år. Klarer du å adskille de to kurvene? Klarer du å gjenkjenne "sykloidebevegelsene" fra Figur 1 i plottet ditt? Du trenger bare legge ved koden som lager plottet ditt, ikke selve plottet. Du kan selv velge om du bruker Matlab eller Python.
Løsning: Dette kan plottes slik

```
rj = 150; Tj = 365; rm=0.384; Tm = 27.3;
t = linspace(0,365,1000);
plot(rj*cos(2*pi*t/Tj) + rm*cos(2*pi*t/Tm), rj*sin(2*pi*t/Tj) + rm*sin(2*pi*t/Tm));
hold on
plot(rj*cos(2*pi*t/Tj), rj*sin(2*pi*t/Tj));
```

Det er vanskelig å se sykloidebevegelsene her, siden bevegelsene til månen i forhold til jorda ikke er av samme størrelsesorden som jordas bevegelse i forhold til sola. Det er også vanskelig å adskille de to kurvene, med mindre du zoomer inn mye.
c) Finn et uttrykk for alle tidspunkter for fullmåne (d.v.s. når jorda ligger på en rett linje mellom månen og sola) og nymåne (månen ligger på en rett linje mellom jorda og sola). Tidsforskjellen mellom to fullmåner kalles også *synodisk omløpstid*. Hva er størst av siderisk og synodisk omløpstid?
Løsning: Fullmåne inntreffer når $\mathbf{r}_1(t)$ og $\mathbf{r}_2(t)$ peker i samme retning, det vil si når $2\pi t/T_j = 2\pi t/T_m + 2r\pi$, med r et heltall. Nymåne inntreffer når $\mathbf{r}_1(t)$ og $\mathbf{r}_2(t)$ peker i motsatt retning, det vil si når $2\pi t/T_j = 2\pi t/T_m + (2r+1)\pi$. Disse inntreffer når $t = \frac{k}{2(1/T_m - 1/T_j)}$, med k et heltall. Ved tid $t = 0$ har vi fullmåne. Deretter vil nymåne/fullmåne inntreffe vekselvis med $\frac{1}{2(1/T_m - 1/T_j)} \approx 14.8$ dagers mellomrom.

d) Finn hastighetsvektoren $\mathbf{v}(t)$ og et uttrykk for farten $v(t)$ til månen i banen rundt sola. Når har månen størst og minst fart i banen sin?
Hint: Hovedproblemet her er kanskje å holde styr på alle konstantene, men du får også bruk for identitetene

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y,$$

der x og y antar verdiene $2\pi t/T_j$ og $2\pi t/T_m$.
Løsning: Vi får at

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} -2\pi\frac{r_j}{T_j}\sin(2\pi t/T_j) - 2\pi\frac{r_m}{T_m}\sin(2\pi t/T_m) \\ 2\pi\frac{r_j}{T_j}\cos(2\pi t/T_j) + 2\pi\frac{r_m}{T_m}\cos(2\pi t/T_m) \end{pmatrix}.$$

Vi får så at

$$\begin{aligned} v(t)^2 = |\mathbf{r}'(t)|^2 &= \left(2\pi\frac{r_j}{T_j}\right)^2 + \left(2\pi\frac{r_m}{T_m}\right)^2 \\ &+ 8\pi^2\frac{r_j}{T_j}\frac{r_m}{T_m}\left(\sin(2\pi t/T_j)\sin(2\pi t/T_m) + \cos(2\pi t/T_j)\right)\cos(2\pi t/T_m) \\ &= \left(2\pi\frac{r_j}{T_j}\right)^2 + \left(2\pi\frac{r_m}{T_m}\right)^2 + 8\pi^2\frac{r_j}{T_j}\frac{r_m}{T_m}\cos(2\pi(t/T_m - t/T_j)). \end{aligned}$$

Vi ser her at uttrykket er størst når $2\pi(t/T_m - t/T_j)$ antar verdiene $2r\pi$. Fra b) vet vi at dette er nøyaktig fullmånetidspunktene, som da er tidspunktene med størst fart. Uttrykket er minst når $2\pi(t/T_m - t/T_j)$ antar verdiene $(2r+1)\pi$. Dette er nymånetidspunktene, som dermed er tidspunktene med minst fart. Man kan også si at tidspunktene med størst/minst fart inntreffer når månen er lengst unna/nærmest sola.