Oppgaver

4.8: 1, 2

4.9: 1, 2, 3, 4

4.10: 1, 2ab, 3, 4ab, 7, 9, 13

4.11: 1, 3, 4, 7

4.8 Elementære matriser

I identitetsmatrisen

$\downarrow$ Én radoperasjon

E ← slike matriser kalles elementære matriser.

eks:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (bytte rad 1 og 2)

$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (legg til $(-3)\cdot$ rad 2 i rad 1)

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (bytte rad 1 og 2)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ (legg til $\frac{1}{2}$ rad 2 til rad 3)

$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (multiplisere rad 1 med 4)

4.8.2 Skriv $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ som et produkt av elementære matriser.

Teori: R : rad operasjon $\longleftrightarrow$ E : elementær matrise

(bytte 1 & 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

A $n \times n$ matrise $\xrightarrow{R}$ A'

$\Longrightarrow A' = E \cdot A.$

Radreduser A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{I+II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\overset{\frac{1}{3}II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{I+(-2)II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \square$$

elementære.

4.9 Determinanter

A $n\times n$ matrise $\rightsquigarrow$ $\det A \in \mathbb{R}$
/ $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ $\qquad \mathbb{C}$

Defineres rekursivt:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Egenskaper:

- $A = \begin{pmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det A = 0$
- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{22} & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$
- Radoperasjoner påvirker determinanten slik: $A' = EA$
  - $\cdot s \iff \det(A') = s \det A$
  - $I_i \leftrightarrow I_j \iff \det A' = (-1)\det A$
  - $I_i \to I_i + sI_j \iff \det A' = \det A$
- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ $\leftarrow$
- $\det A \neq 0 \iff A$ invertibel $\leftarrow$
- $\det A^T = \det A$

  $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$ (A invertibel)

4.9.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + 2(3+2) + 1(3 \cdot 0 - 1)$$

$$= \underline{12}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det A = 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdots + 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-2-2) + 3 \cdot 1$$

$$= \underline{-5}$$

4.9.2 a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(forandrer ikke det)

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \right)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 9/10 \end{pmatrix}$$

$$\det = \underline{9/10}$$

$$\longrightarrow \det A = \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \right)^{-1}$$

$$= \underline{9}.$$

4.9.3 a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}}_{A'} \quad (\det \cdot (-1))$$

$$\det A' = -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -1\,(7-6) = -1$$

$$\rightarrow \det A = (-1)\cdot(-1) = 1$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det A^T = \det A$: $\quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^T \sim \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\det (-1))$$

$$\det A^T = (-1) \cdot \left(-3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1) \right)$$

$$= -3\,(2-12) = \underline{30}$$

4.10. Egenverdier & Egenvektorer

Recap: A $n \times n$ matrise

$v \in \mathbb{R}^n$ er en egenvektor dersom

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

der $\lambda \in \mathbb{C}$. λ kalles en egenverdi.

Strategi for å finne λ og v:

- Finne λ ved å løse $\underline{\det(\lambda I_n - \underset{n \times n}{A}) = 0}$
- For hver λ over, finn v ved å finne en basis for nullrommet til $A - \lambda I$.

$\left((A - \lambda I)v = 0 \iff Av = \lambda v \iff v \text{ egenvektor.} \right)$

Setning: A symmetrisk ($A = A^T$)

$\implies$ alle λ'ene er reelle og $\exists$ ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ med egenvektorer for A.

Diagonalisering: Dersom $\exists$ basis med n egenvektorer for A, er A diagonaliserbar:

$$A = S D S^{-1}$$

der $S = [v_1 \cdots v_n]$ egenvektorer

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$$

4.10

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda-2 & 1 \\ 1 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

det $= (\lambda-2)^2 - 1$

det $= 0 \iff \lambda - 2 = \pm 1$

$\iff \lambda = 1$ eller 3.

$\underline{\lambda = 3}$ $3I - A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en nullvektor for denne

$\Rightarrow v$ er en egenvektor.

$\underline{\lambda = 1}$: $\lambda I - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor

$\rightsquigarrow$ $\lambda = 3 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

2a $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 3 \\ -4 & \lambda-2 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$

$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} + 3\cdot 0$

$= (\lambda-2)^2(\lambda-1) - 4(\lambda-1)$

$= (\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+\cancel{4}-\cancel{4}) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-4)$

$\lambda=0$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ egenvektor

$2x + y = 0$
$z = 0$ $\leadsto$ Velg $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda=1$: $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $x + 2z = 0$
$y - 5z = 0$

Velg $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda=4$ $A - 4I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} -2x + y = 0 \\ z = 0 \end{matrix}$

$\Rightarrow$ Vek $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda = 0, \ 1, \ 4$

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

4a Finn egenverdier + egenvektorer og skriv vektoren x som en lineærkombinasjon av egenvektorene.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{Mål: } x = \underline{a}\, v_1 + \underline{b}\, v_2$$

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda-2 & -2 \\ -2 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

$$\det = (\lambda-2)(\lambda+1) - 4 = \lambda^2 - \lambda + 6 = \underline{(\lambda-3)(\lambda+2)}$$

$\underline{\lambda = -2}$
$$A - (-2)I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 2I = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ er en nullvektor / egenvektor for A.

$\underline{\lambda = 3}$:
$$A - 3I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for A.

$\rightsquigarrow$ skal nå skrive $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ som en lineærkombinasjon av $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\rightsquigarrow$ sammensatt matrise: $B = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$

$$\Rightarrow B \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1-6/5 \\ 0 & 1 & 3/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11/5 \\ 0 & 1 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \frac{11}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

7 (i) Vis at A og A^T har de samme egenverdiene

(ii) Har de de samme egenvektorene?

(i) λ egenverdi for $A \iff Av = \lambda v$ for en $v \neq 0$

$\iff \det(\lambda I - A) = 0$

$\iff \det(\lambda I - A^T) = 0$ $(\det M = \det M^T)$

$\iff \lambda$ egenverdi for A^T

(ii) Observasjon: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ egenvektor hvis radene til A summer til samme tall

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$ egenverdi: 3

men: $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ har ikke denne egenskapen:

$$A^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er ikke en egenvektor.

9 Om v er en egenvektor for både A og B

$\rightarrow$ Vis at v er en egenvektor for $M = A \cdot B$.

Vet: $Av = \lambda_1 v$ for en $\lambda_1 \in \mathbb{C}$

$Bv = \lambda_2 v$ for en $\lambda_2 \in \mathbb{C}$

$\leadsto$ $Mv = (AB)v = A(Bv)$

$= A(\lambda_2 v) = \lambda_2 (Av)$

$= \lambda_1 \lambda_2 v$ $\leadsto$ v egenvektor for M med egenverdi $\lambda_1 \lambda_2$.

4.4 Nøkkelformel: $\underbrace{A^n v = \lambda^n v}$ v egenvektor m/ λ egenverdi

3 $A = \begin{pmatrix} 1.1 & -0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$

(i) Finn v og λ for A

(ii) x_n = dyr av type 1 i år n

y_n = —"— type 2 i år n

$x_{n+1} = 1.1 x_n - 0.2 y_n$ $\qquad x_0 = 3000$

$y_{n+1} = 0.1 x_n + 0.8 y_n$ $\qquad y_0 = 1000$

Finn x_n og y_n;

Hva skjer når $n \to \infty$?

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 1.1 & 0.2 \\ -0.1 & \lambda - 0.8 \end{pmatrix}$$

$$\det = (\lambda - 1)(\lambda - 0.9)$$

$\underline{\lambda = 1}$: $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.2 \\ 0.1 & -0.2 \end{pmatrix} \sim v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ egenvektor

$\underline{\lambda = 0.9}$ $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.2 \\ 0.1 & -0.1 \end{pmatrix} \sim v = \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ egenvektor

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \cdots = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 3000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \cdots = \begin{pmatrix} 2 - (0.9)^n & -2 + 2(0.9)^n \\ 1 - (0.9)^n & -1 + 2(0.9)^n \end{pmatrix}$$

$$A^n \begin{pmatrix} 3000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 4000 - 1000 \cdot 0.9^n \\ 2000 - 1000 \cdot 0.9^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Når $n \to \infty$: $(0.9)^n \to 0$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{\begin{pmatrix} 4000 \\ 2000 \end{pmatrix}}$$