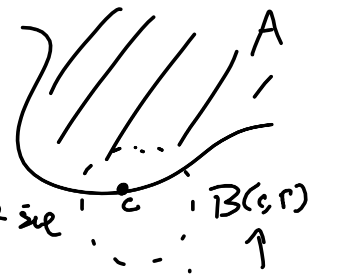
5.1	1abcde, 2ab, 4, 6	1cde, 2, 4, 6
5.2	1, 4	1 (4)
5.4	1, 2, 4, 5, 6, 7	1, 2, 4, 7
5.5	1, 4	1, 4

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ åpen om A ikke inneholder noen randpunkter.

$\Longleftrightarrow$ $\forall a \in A$ finnes det en $B(a,r)$ inneholdt i A.



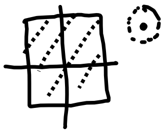
inneholder både punkter i A og i A^c

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ er lukket om den inneholder alle randpunktene sine

$\Longleftrightarrow$ A^c er åpent.

5.1.1

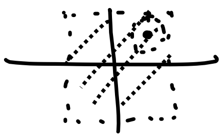
a)



$|x| \leq 1$
$|y| \leq 1$

Lukket

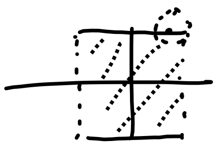
b)



$|x| < 1$
$|y| < 1$

Åpen

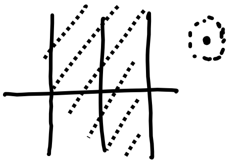
c)



$|x| < 1$
$|y| \leq 1$

Ikke åpen ikke lukket

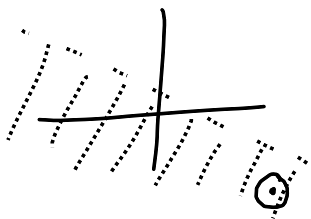
d



$|x| \leq 1$

Lukket

e



$y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

$x + 2y < 1$

Åpen

5.1.2 Regn ut grenseverdiene

a) $x_n = \left(\frac{2n^2+1}{n^2+3n}, \frac{3n}{1-2n} \right)$ når $n \to \infty$

b) $y_n = \left(n \sin \frac{1}{n}, n(1 - e^{2/n}) \right)$

a): $\frac{2n^2+1}{n^2+3n} = \frac{2 + 1/n^2}{1 + 3/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$

$\frac{3n}{1-2n} = \frac{3}{\frac{1}{n} - 2} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{3}{2}$ $\quad \therefore x_n \to (2, -3/2)$

b) $n \sin \frac{1}{n} = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$n(1-e^{2/n}) = \frac{1-e^{2/n}}{\frac{1}{n}} = -\frac{f(\frac{1}{n}) - f(0)}{\frac{1}{n}}$ der $f(x) = e^{2x}$

$\xrightarrow[n\to\infty]{} -f'(0) = \underline{-2}$

$\therefore y_n \to (1, -2)$

5.1.4 Anta $a, b \in \mathbb{R}^m$ (x_n) følge s.a $x_n \to b$

Vis at
$$\lim_{n\to\infty} |x_n - a| = |b-a|$$

Gitt $\varepsilon > 0$. Skal vise at $\exists N$ s.a
$$\big|\, |x_n - a| - |b-a| \,\big| < \varepsilon$$
for alle $n \geq N$.

Påstand:
$\big||x-a| - |b-a|\big| \leq |x_n - b|$

Bevis: $|x_n - a| \leq |x_n - b| + |b-a|$ (trekantulikheten)

$\rightsquigarrow |x_n - a| - |b-a| \leq |x_n - b|$

$|b-a| \leq |x_n - b| + |x_n - a|$

$\rightsquigarrow |x_n - a| - |b-a| \geq -|x_n - b|$

$\rightsquigarrow \big||x-a| - |b-a|\big| \leq |x_n - b|$ ✓

$x_n \to b$ $\rightsquigarrow$ kan velge N s.a $|x_n - b| < \varepsilon$ $\forall n \geq N$

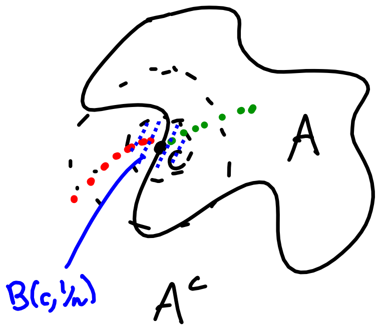
$\rightsquigarrow \big||x_n - a| - |b-a|\big| \leq |x_n - b| < \varepsilon$

$\rightsquigarrow |x_n - a| \longrightarrow |b-a|$.

5.1.6 Vis at dersom $c \in \mathbb{R}^m$ er et randpunkt for $A \subseteq \mathbb{R}^m$

$\rightsquigarrow \exists$ to følger (x_n), (y_n) som begge konvergerer mot c og s.a. $x_n \in A$, $y_n \in A^c$ for alle n.

c randpunkt $\Leftrightarrow$ Alle $B(c,r) \subset \mathbb{R}^m$ inneholder både punkter fra A og A^c.



Definer (x_n) og (y_n) slik:

For $n \geq 1$ velg $x_n \in B(c, \frac{1}{n}) \cap A$

$y_n \in B(c, \frac{1}{n}) \cap A^c$

Disse må konvergere mot c (fordi de er inneholdt i $B(c, \frac{1}{n})$ for alle n).

5.2.1 Bevis setning 5.2.2: Anta $(x_n) \in \mathbb{R}^m$ er en følge som konvergerer mot $x \in \mathbb{R}^m$

$\Rightarrow$ alle delfølger av x_{n_k} konvergerer også mot x.

$[\; n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k$

$y_k = x_{n_k}$ delfølge

$\exists$ = "det finnes en"
$\forall$ = "for alle"

Gitt $\varepsilon > 0 \rightsquigarrow \exists N$ s.a $|x_n - x| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$

$\rightsquigarrow \exists N$ s.a $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$ for alle $k \geq N$

$\rightsquigarrow x_{n_k}$ konvergerer mot x.

5.2.4 (x_n) følge i $\mathbb{R}^m$.
x er et opphopningspunkt (OP) for x_n dersom enhver kule $B(x, r)$ inneholder uendelig mange elementer i følgen

a) Vis at x er et OP for x_n $\Leftrightarrow$ x_n har en delfølge som konvergerer mot x

$\Rightarrow$: $B(x, \frac{1}{k})$ inneholder en x_{n_k}

$\rightsquigarrow |x_{n_k} - x| < \frac{1}{k}$

$\rightsquigarrow x_{n_k} \to x$ når $k \to \infty$.

$\Leftarrow$: x ikke er et OP $\Rightarrow$ $B(x,r)$ inneholder kun endelig mange x_n'er

$\Rightarrow c = \min |x_n - x|$ eksisterer (og kan anta >0)

$\Rightarrow |x_n - x| \geq c$ for $n >> 0$

$\Rightarrow$ ingen delfølge som konvergerer mot x.

b) A lukket + begrenset $\Rightarrow$ enhver følge i A har et OP.

$x_n \in A \xrightarrow{\text{Bolzano-Weierstrass}} \exists\, x_{n_k}$ delfølge s.a $x_{n_k} \to x \in A$.

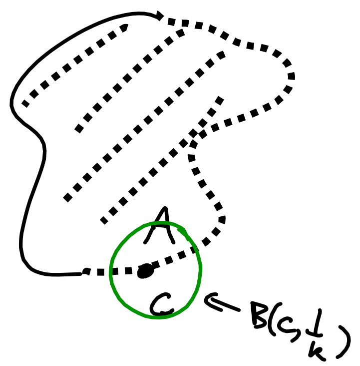
$\overset{a)}{\rightsquigarrow}$ A har et opphopningspunkt.

c) Anta A ikke er lukket.
Vis at $\exists$ en følge (x_n) som ikke har et OP i A.

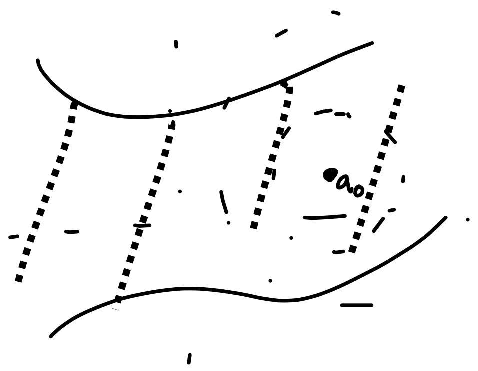
A ikke lukket $\Leftrightarrow$ $\exists c$ randpunkt s.a $c \notin A$

For hver $B(c, \frac{1}{k})$ velg $x_k \in B(c, \frac{1}{k}) \cap A$

$\rightsquigarrow$ (x_n) konvergerer mot c
men x_n har ikke et OP i A $(c \notin A\,!)$.



d) Anta A ikke begrenset.
Vis at $\exists (x_n)$ i A som ikke har OP i A.



A ikke begrenset $\Leftrightarrow$ $\nexists B(a_0, R)$
s.a $B(a_0, R) \supset A$

$\Leftrightarrow$ $\{x \in \mathbb{R}^m \mid |x - a_0| > k\} \cap A \neq \emptyset$ for alle k.

$B(a_0, k)^c$

Velg $x_k \in B(a_0, k)^c \cap A$.

$\rightsquigarrow$ Følge (x_k) s.a $|x_k - a_0| > k$

$\rightsquigarrow$ Gitt $B(c, r)$ $\rightsquigarrow$ $|x_k - c| \geq |x_k - a_0| - |a_0 - c|$

$\geq k - |a_0 - c|$

konstant

$\rightsquigarrow$ kun endelig mange x_k i $B(c, r)$.

$\rightsquigarrow$ x_k har ingen OP.

5.4.1

$$x_{n+1} = 0.6\,x_n - 0.6\,y_n + 0.2$$
$$y_{n+1} = 0.6\,x_n + 0.6\,y_n + 1$$

$x_1 = y_1 = 0.$ $\rightsquigarrow$ MATLAB plott

Vis at $F(x,y) = \begin{pmatrix} 0.6x - 0.6y + 0.2 \\ 0.6x + 0.6y + 1 \end{pmatrix}$ har et fikspunkt.

$F(x,y) = (x,y)$

$$F(-1,1) = \begin{pmatrix} 0.6\cdot(-1) - 0.6 + 0.2 \\ -0.6 + 0.6 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ $(-1,1)$ er et fikspunkt.

5.4.2

$$x_{n+1} = 0.9\,x_n + 0.01\,y_n - 10$$
$$y_{n+1} = -1.01\,x_n + y_n + 30$$

$x_1 = 20$
$y_1 = 2000$

5.4.4

$$x_{n+1} = 1.01\,\frac{x_n + y_n}{2}$$
$$y_{n+1} = \min(x_n,\ 1.1\,y_n)$$

$x_1 = 8$ $\quad$ $x_1 = 12$
$y_1 = 12$ $\quad$ $y_1 = 8$

5.4.7 $\quad f(x) = x^2 + x - 2$

Vis at $\bar{x} = \sqrt{2}$ er et fikspunkt:

$$\bar{x} = f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} - 2 = \sqrt{2} = \bar{x} \quad \checkmark$$

$x_{n+1} = f(x_n)$ $\qquad$ $\underline{x_n \simeq \sqrt{2}}$

5.5.1 $F(x,y) = \left(\frac{1}{2} \sin(x+y), \ \frac{1}{2} \cos(x-y) \right)$

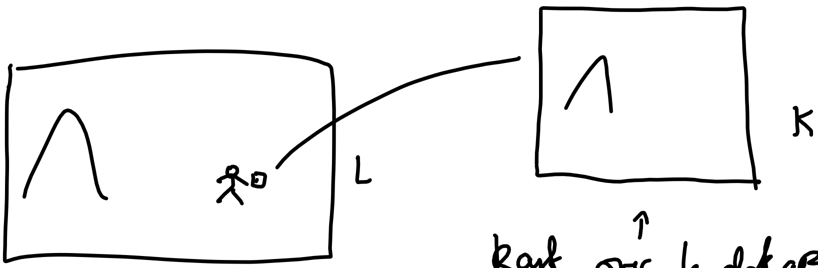
a) MATLAB program $u_{n+1} = F(u_n)$

b) Kjør programmet med $u_1 = (1,-1)$

c) Kjør programmet 6 ganger til og lag plott for

$-2{,}5 \le x_1, y_1 \le 2.5$

5.5.4



Kart over landskapet L

(*) Det finnes nøyaktig et punkt på kartet som ligger loddrett over det tilsvarende punktet i landskapet.

Kartet gir en funksjon $f: L \longrightarrow K$ (skalering)

$|f(x) - f(y)| < C \cdot |x-y|$ $\leadsto$ f er en kontraksjon

$0 < C < 1$

$\leadsto$ har et fikspunkt ved Banachs fikspunkt teorem

$\leadsto$ $\exists$ punkt $p \in L$ s.a $f(p) = p$

$\leadsto$ (*) OK.