Oppgaver 8.5.19

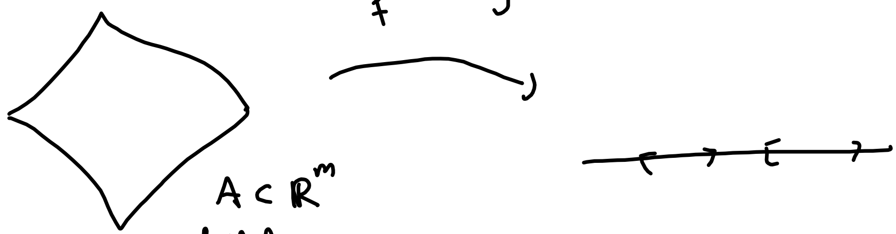
5.8 1, 3

5.9 2ac, 6, 8, 10, 11, 12, 14, 16, 18

5.10 1acdf, 2, 3, 5, 8, 11, 12, 13, 14

5.8 Ekstremalverdisetningen:

f kontinuerlig



$A \subset \mathbb{R}^m$ lukket og begrenset

$\mathbb{R}$

$\therefore$ f er begrenset: Det fins en $K > 0$ s.a $|f(a)| \leq K$ for alle $a \in A$

1. A lukket og begrenset $\subset \mathbb{R}^m$
   $f : A \to \mathbb{R}^k$ kontinuerlig
   Vis at det finnes en K s.a $\|F(x)\| \leq K$ for alle $x \in A$.

Definer $f(x) = \| F(x) \|$ ~ kontinuerlig:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{R}^k \arrow[r, "|x|"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

EVS $\Rightarrow$ f er begrenset

$\Rightarrow$ Det finnes en $K > 0$ s.a $|f(x)| \leq K$ for alle $x \in A$

$\Rightarrow$ $\|F(x)\| \leq K$ for alle $x \in A$

3 $A \subseteq \mathbb{R}^m$ lukket og begrenset
$F: A \to A$ kontinuerlig

a) Vis at $f(x) = |x - F(x)|$ er kontinuerlig $(f: A \to \mathbb{R})$
Forklar at f har et minimumspunkt.

f er sammensetningen av to kontinuerlige funksjoner: $x \mapsto x - F(x)$, $x \mapsto |x|$
$\to f$ er kontinuerlig.

$f: A \to \mathbb{R}$ har et minimumspunkt ved EVS.

b) Anta $|F(x) - F(y)| < |x - y|$ for alle $x, y \in A$, $x \neq y$ $(*)$
Vis at F har et entydig fikspunkt. $F(x) = x$

La $a \in A$ være minimumspunkt for funksjonen $|x - F(x)|$

Påstand: $F(a) = a$.

Om $F(a) \neq a \Rightarrow$ Sett $x = a$ og $y = F(a)$ i $(*)$

$\Rightarrow |F(a) - F(F(a))| < |a - F(a)|$

$\Rightarrow f(F(a)) < f(a)$

$\Rightarrow$ motsier at a er minimumspunkt for f

$\rightsquigarrow F(a) = a$ og a er et fikspunkt.

Entydighet: Anta $a \neq b$ og $F(a) = a$, $F(b) = b$ fikspunkter

$\rightsquigarrow \underbrace{|F(a) - F(b)|}_{= |a-b|} < |a - b| \Rightarrow |a-b| < |a-b|$
$\Rightarrow$ motsigelse.

$\Rightarrow a = b$.

c) Vis med eksempel at F ikke trenger å ha et fikspunkt dersom en dropper betingelsene A lukket og begrenset.

- $A = \mathbb{R}$ (ikke begrenset), $f(x) = x + 1$ $\to f$ har ikke noe fikspunkt
- $A = (0,1)$ (ikke lukket), $f(x) = x^2$ $\to f(x) = x \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x = 0, 1$
$\to f$ har ikke noe fikspunkt i A.

5.9 Maks/Min punkter

Andrederiverttesten: $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ C^2 (dobbelt deriverbar)

$a \in A$ stasjonært punkt

a) Om alle egenverdiene til Hessematrisen $Hf(a)$ er positive, er a et lokalt minimumspunkt

b) ——— " ——— negative er a et lokalt makspunkt

c) Blandede egenverdier $\longrightarrow$ sadelpunkt

$$Hf = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j}$$

2a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y$

Stasjonære punkter: $\nabla f = 0$:

$\nabla f = (2x - 2, 2y + 4)$

$\leadsto a = (1, -2)$

$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ to pos egenverdier

$\leadsto$ a minimumspunkt.

c) $f(x,y) = e^{x^2+3y^2}$

$\nabla f = \left(2x\, \underline{e}^{x^2+3y^2},\ 6y\, \underline{e}^{x^2+3y^2} \right)$

$\rightsquigarrow$ $(0,0)$ eneste stasjonære punkt

$\rightsquigarrow$ $(0,0)$ minimumpunkt.

$\underline{6}$ $f(x,y) = (x+y^2)e^x$

$\nabla f = \left((x+y^2)e^x + e^x,\ 2y e^x \right)$

$= \left((x+y^2+1)e^x,\ \underline{2y\, e^x} \right)$

Stasjonære punkter: $\begin{matrix} y = 0 \\ x+1 = 0 \end{matrix}$ $\rightsquigarrow$ $a = (-1,0)$

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x+y^2+1)e^x \right) = e^x(x + \underline{y}^2 + 2)$

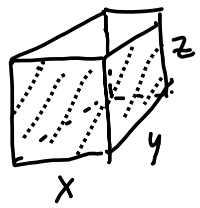
$B = \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(2y\, e^x) = 2y\, e^x$

$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^x$

$Hf(-1,0) = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}$ to positive egenverdier

$\Rightarrow$ minimumpunkt.

11



$$\text{Volum} = V = xyz \rightsquigarrow z = \frac{V}{xy}$$

$$OA = 2xz + xy + 2yz$$

$$= \frac{2xV}{xy} + xy + \frac{2yV}{xy}$$

$$= \frac{2V}{y} + xy + \frac{2V}{x} =: f(x,y)$$

$$\nabla f = \left(y - \frac{2V}{x^2} \, , \, x - \frac{2V}{y^2} \right)$$

stasjonært punkt: $\nabla f(x,y) = (0,0) \iff y = \frac{2V}{x^2}$ og $x = \frac{2V}{y^2}$

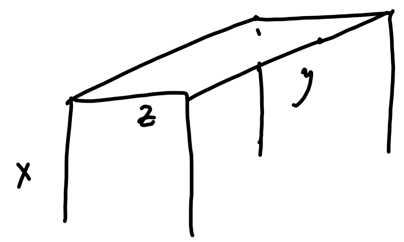
$$x = \frac{2V}{\left(\frac{2V}{x^2}\right)^2} = \frac{2V x^4}{4V^2} = \frac{x^4}{2V} \rightsquigarrow x^3 = 2V$$

$$\rightsquigarrow x = \sqrt[3]{2V}$$

$\rightsquigarrow y = \sqrt[3]{2V}$ (ved symmetri)

$$\rightsquigarrow z = \frac{V}{xy} = \frac{V}{\sqrt[3]{2V}\sqrt[3]{2V}} = \frac{V}{2^{2/3} V^{2/3}} = \underline{2^{-2/3} V^{1/3}}$$

12



$V = xyz = 500$

$L = 4x + 2z + 2y$

↑ skal minimeres.

$$z = \frac{500}{xy} \rightsquigarrow L = 4x + 2y + \frac{2 \cdot 500}{xy} = \underbrace{4x + 2y + \frac{1000}{xy}}_{f(x,y)}$$

Stasjonære punkter:

$$\nabla f = \left(4 - \frac{1000}{x^2 y},\ 2 - \frac{1000}{xy^2}\right) = (0,0)$$

$4x^2y = 1000 \quad x^2y = 250 \quad y = \frac{250}{x^2}$

$2xy^2 = 1000 \quad xy^2 = 500$

$$\rightsquigarrow x\left(\frac{250}{x^2}\right)^2 = 500 \quad \rightsquigarrow 250^2 = 500x^3$$

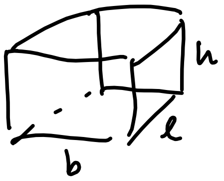
$$\rightsquigarrow x^3 = 125$$

$$\rightsquigarrow x = 5$$

$$\rightsquigarrow y = \frac{250}{25} = 10$$

$$\rightsquigarrow z = \frac{500}{xy} = \frac{500}{50} = \underline{10} \quad \rightsquigarrow (x,y,z) = (5,10,10)$$

16



$l + b + h \le 108$

maksimum volum $= l \cdot b \cdot h$

$\rightsquigarrow$ kan anta $l + b + h = 108$.

$V = f(x,y,z) = xy(108 - x - y) = 108xy - x^2y - xy^2$

Finn stasjonære punkter:

$\nabla f = (108\underline{y} - 2x\underline{y} - \underline{y}^2,\ 108\underline{x} - 2y\underline{x} - \underline{x}^2)$

Vet at x og $y \neq 0$:

$108 - 2x - y = 0$

$108 - x - 2y = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 108 \\ 1 & 2 & 108 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 108 \\ 0 & 1 & 36 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 36 \\ 0 & 1 & 36 \end{pmatrix}$$

$x = y = 36$.

5.10 Lagranges multiplikatormetode:

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ åpen

$f, g: U \to \mathbb{R}$ deriverbare

$\bar{x} \in U$ lokalt maks/min punkt på mengden

$$X = \{ x \in U \mid g(x) = b \}$$

$\Rightarrow$ enten $\nabla g(\bar{x}) = 0$ eller så finnes en $\lambda \in \mathbb{R}$

s.a $\nabla f(\bar{x}) = \lambda \nabla g(\bar{x})$.

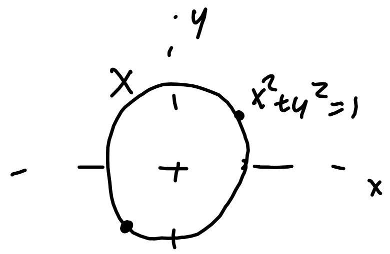
Flere bibetingelser: Som over; enten er $\nabla g_1 \cdots \nabla g_k$ lineært avhengige i $\bar{x}$, eller så finnes $\lambda_1 \ldots \lambda_k$ s.a

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \ldots + \lambda_k \nabla g_k$$

5.10 acdf

a) $f(x,y) = 4x - 3y$

$g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$



$\nabla f = (4, -3)$

$\nabla g = (2x, 2y) \leftarrow \neq 0$ på X

$$\binom{4}{-3} = \lambda \binom{2x}{2y} \qquad \lambda = \frac{4}{2x} = \frac{-3}{2y}$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4}x \rightsquigarrow x^2 + \left(\frac{3x}{4}\right)^2 = 1$$

$$\rightsquigarrow x^2\left(1 + \frac{9}{16}\right) = 1 \longrightarrow \underline{x = \pm \frac{4}{5}}$$

$$\rightsquigarrow y = \pm \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \pm \frac{3}{5}.$$

$\sim f(x,y) = 4x - 3y$ har makspunkt: $(x,y) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

minpunkt: $(x,y) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

e) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

$g(x,y,z) = 2x - 3y + 2z \quad = 17$

$\nabla f = (2x, 2y, 2z) \qquad \nabla f = \lambda \nabla g$

$\nabla g = (2, -3, 2)$

$2x = 2\lambda \qquad x = \lambda$

$2y = -3\lambda \qquad y = -\frac{3}{2}\lambda$

$2z = 2\lambda \qquad z = \lambda$

$17 = 2x - 3y + 2z = 2\lambda - 3\cdot(-3/2)\lambda + 2\lambda = 8.5\lambda \Rightarrow \underline{\lambda = 2}$

$(x,y,z) = (2, -3, 2)$

Dette er et minpunkt.

f) $f(x,y,z) = x^2 - 2x + 2y^2 + z^2 + z$

$g_1 = x + y + z = 1$

$g_2 = 2x - y - z = 5$

$\nabla f = (2x - 2, 4y, 2z + 1)$

$\nabla g_1 = (1, 1, 1)$ ← ikke lineært avhengige.

$\nabla g_2 = (2, -1, -1)$

$\rightsquigarrow \nabla f = 4\lambda_1 \nabla g_1 + 4\lambda_2 \nabla g_2$

$$\begin{pmatrix} 2x-2 \\ 4y \\ 2z+1 \end{pmatrix} = 4\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$2x - 2 = 4\lambda_1 + 8\lambda_2 \quad \rightsquigarrow \quad x = 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2$

$4y = 4\lambda_1 - 4\lambda_2 \quad \rightsquigarrow \quad y = \lambda_1 - \lambda_2$

$2z + 1 = 4\lambda_1 - 4\lambda_2 \quad \rightsquigarrow \quad z = 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - 1/2$

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= \dots = 5\lambda_1 + \lambda_2 + 3/2 = 1 \\ 2x - y - z &= \dots = \lambda_1 + 11\lambda_2 + 4.5 = 5 \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow \quad \lambda_1 = -1/9, \quad \lambda_2 = \frac{1}{18}$$

$x = 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2 = \cancel{2\cdot\left(-1/9\right) + 4\left(\frac{1}{18}\right)} + 2 = 2$

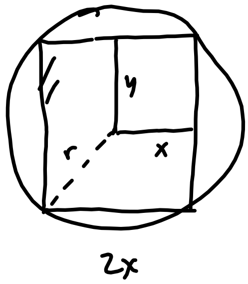
$y = -1/6$

$z = -5/6$

$f(2, -1/6, -5/6) = -1/12$

$f(2, -1, 0) = 2 \quad \rightsquigarrow \quad (2, -1/6, -5/6)$ minimumspunkt.

12



Bæreevnen:

$f(x,y) = k\,xy^2$

$k > 0$

$g = x^2 + y^2 = r$

Finn x, y s.a $f(x,y)$ er størst

$\nabla f = (ky^2,\ 2kxy)$

$\nabla g = (2x,\ 2y) \quad (\neq 0)$

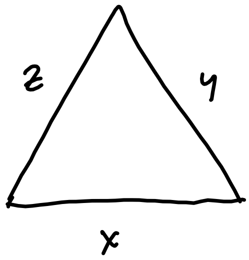
LM $\leadsto$
$$ky^2 = \lambda \cdot 2x$$
$$2kxy = \lambda \cdot 2y$$

$y \neq 0 \leadsto kx = \lambda$ $\quad \cancel{k}y^2 = \cancel{k}x\,(2x)$

$y^2 = 2x^2 \quad \leadsto \quad y = \pm\sqrt{2}\,x$

$\leadsto \quad x^2 + 2x^2 = r \quad \leadsto \quad x = \sqrt{\frac{r}{3}}$ og $y = \sqrt{\frac{2r}{3}}$.

14



$$A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$$

$$s = \frac{x+y+z}{2}$$

Vis at blant alle trekant med fiksert omkrets $(O = 2s)$ har likesidede trekanten størst areal.

Optimer $f(x,y,z) = A^2 = s(s-x)(s-y)(s-z)$ s = konstant.

$g = x+y+z = 2s$.

$$\nabla f = \left(-s(s-y)(s-z),\ -s(s-x)(s-z),\ -s(s-x)(s-y)\right)$$

$$\nabla g = (1,1,1) \neq 0$$

$$\nabla f = \lambda \cdot \nabla g \quad \lambda = -\underline{s}(s-y)\underline{(s-z)} = -\underline{s}(s-x)\underline{(s-z)}$$
$$= -s(s-x)(s-y)$$

$s-x \neq 0$: $x = s = O/2 \rightsquigarrow y+z = O/2 \rightsquigarrow x = y+z$

men trekantulikheten sier at $x < y+z$

$\rightsquigarrow$ ingen av faktorene ovenfor er 0

$$s-x = s-y = s-z \qquad x+y+z = 2s$$

$\rightsquigarrow$ $\underline{x = y = z}$ $\rightsquigarrow$ likesidet trekant.