Forelesning, 19. Januar 2021

tirsdag 19. januar 2021 12:10

Parametriserte kurver i $\mathbb{R}^2$, i $\mathbb{R}^3$, i $\mathbb{R}^n$

$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}$$

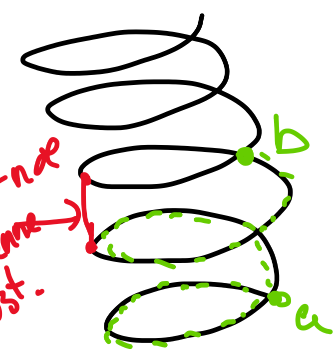
$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$$

$$\bar{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

Eks. 1.

Spiralkurve

$$\bar{r}(t) = (R\cos(t), R\sin(t), at) \qquad R: \text{radius}, \quad a \in \mathbb{R}$$

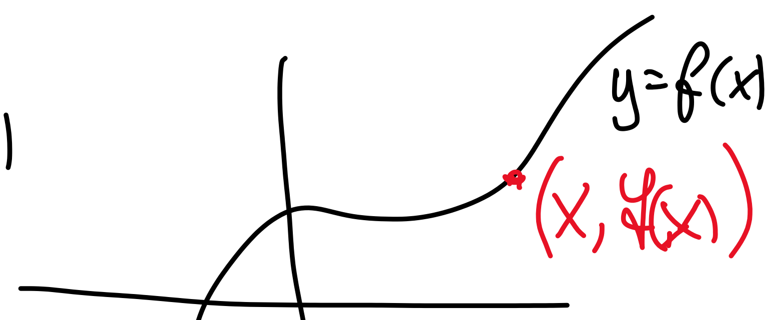


a sier noe om denne avst.

Hvor langt er det fra a til b langs kurven?

Eks. 2.

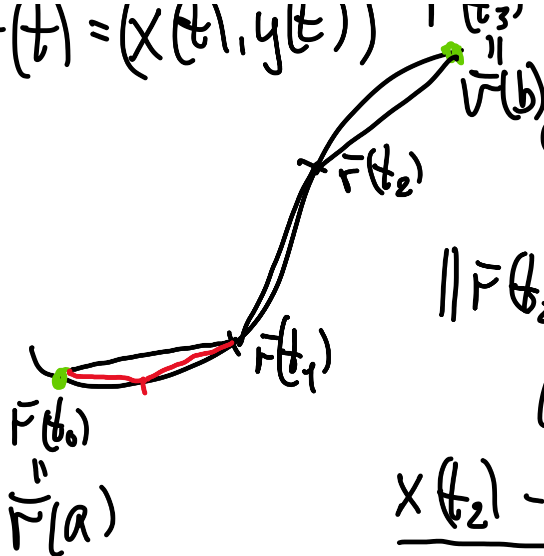
Funksjon $y = f(x)$



$$\bar{r}(t) = (t, f(t)) \quad t \in \mathbb{R}$$

Buelengden

$\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$



Lengden av stykkevis lineær approx. av kurven.

$$\|\bar{r}(t_2) - \bar{r}(t_1)\| = \sqrt{(x(t_2) - x(t_1))^2 + (y(t_2) - y(t_1))^2}$$

(summerer alle bitene)

$$\frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \approx x'(t_1)$$

$$= \sqrt{(x'(t_1)(t_2 - t_1))^2 + (y'(t_1)(t_2 - t_1))^2}$$

alle $t_i - t_{i-1} = \Delta t$ (like

$$= \sqrt{x'(t_1)^2 \cdot \Delta t^2 + y'(t_1)^2 \cdot \Delta t^2}$$

$$= \sqrt{x'(t_1)^2 + y'(t_1)^2}\, \Delta t$$

Den deriverte av $\bar{r}(t)$.

lar $\Delta t \to 0$, dvs $\Delta t \rightsquigarrow dt$

$\Sigma \rightsquigarrow \int$

$$\boxed{\text{Buelengden} = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_a^b \|\bar{r}'(t)\|\, dt}$$

Eks.

$$\bar{r}(t) = (\underbrace{R\cos(t)}_{x(t)}, \underbrace{R\sin t}_{y(t)}, \underbrace{at}_{z(t)}) \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\bar{r}'(t) = (-R\sin(t), R\cos(t), a)$$

$$\|\bar{r}'(t)\| = \sqrt{(-R\sin(t))^2 + (R\cos(t))^2 + a^2}$$
$$= \sqrt{R^2(\sin^2(t) + \cos^2(t)) + a^2}$$
$$= \sqrt{R^2 + a^2}$$

Buelengden: $B = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + a^2}\, dt = 2\pi\sqrt{R^2 + a^2}$

Spiralen degenerer til en sirkel $(a = 0)$

$$B = 2\pi\sqrt{R^2 + 0^2} = 2\pi\sqrt{R^2}$$
$$\underline{\underline{= 2\pi R}}$$

Fysisk tolkning

$\bar{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ — posisjon

$t \in \mathbb{R}$ — tid

$\bar{v}(t) = \bar{r}'(t)$: hastighet $(\bar{v})$ (vektor)

$v(t) = \|\bar{r}'(t)\|$: fart (tall) (v)

$\bar{r}''(t) = \bar{v}'(t) = \bar{a}(t)$

akselerasjon / akselerasjons-vektor

$v'(t) = a(t)$

baneakselerasjon

Merk: Baneakselerasjonen kan være 0 selv om akselerasjonsvektoren er ulik 0. !!!

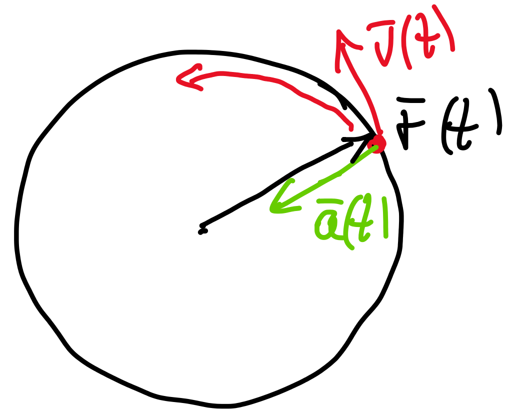
Sirkel: $\bar{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$ Radius $= 1$.

$$v(t) = \bar{r}'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$$

$$\bar{a}(t) = v'(t) = \bar{r}''(t) = (-\cos(t), -\sin(t)) = \underline{-\bar{r}(t)}$$

Fart $v(t) = \|\bar{v}(t)\| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} = 1$

$$a(t) = v'(t) = \underline{0}$$



Tangenten til banen (Enhetstangent, lengde=1)

$$\bar{T}(t) = \frac{\bar{v}(t)}{\|\bar{v}(t)\|} = \frac{\bar{v}(t)}{v(t)}$$

eller $\bar{v}(t) = \underbrace{v(t)}_{\text{fart}} \cdot \underbrace{\bar{T}(t)}_{\text{retning}}$

Derivasjon av $\bar{v}(t)$:

$$\bar{v}'(t) = a(t)\cdot\bar{T}(t) + v(t)\cdot\bar{T}'(t)$$

Derivere $\bar{T}(t)$

$$\|\bar{T}(t)\|^2 = \bar{T}(t)\cdot\bar{T}(t) = 1 \quad \text{for alle } t$$

$$\bar{T}'(t)\cdot\bar{T}(t) + \bar{T}(t)\cdot\bar{T}'(t) = 0$$

$$\cancel{2}\,\bar{T}(t)\cdot\bar{T}'(t) = 0$$

$\bar{T}'(t)$ står normalt på $\bar{T}(t)$

står normalt på hverandre

$$\bar{a}(t) = \bar{v}'(t) = a(t)\cdot \bar{T}(t) + v(t)\cdot \bar{T}'(t)$$

parall med banen (endring av fart) — normalt på fartsretning (endring av retning)

Sirkeleksempel

$$\bar{r}(t) = (\cos(t^2), \sin(t^2))$$

$$\bar{v}(t) = \bar{r}'(t) = (-\sin(t^2)\cdot 2t, \cos(t^2)\cdot 2t)$$

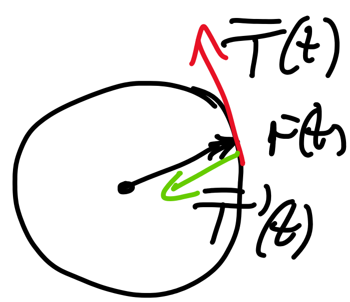
$$v(t) = \|\bar{v}(t)\| = \sqrt{(-\sin(t^2)\cdot 2t)^2 + (\cos(t^2)\cdot 2t)^2}$$

$$= \sqrt{(2t)^2(\sin^2(t^2) + \cos^2(t^2))}$$

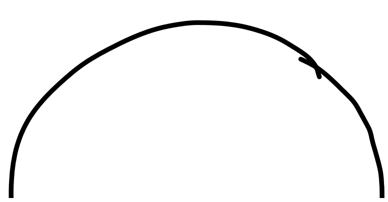
$$= 2t.$$

$$a(t) = v'(t) = 2$$

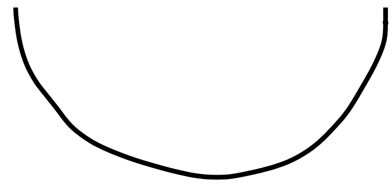
$$\bar{a}(t) = \underbrace{2\cdot \bar{T}(t)}_{\text{endrer farten}} + \underbrace{2t\cdot \bar{T}'(t)}_{\text{endrer retning}}$$



$$\bar{r}(t) = (\cos(g(t)), \sin(g(t)))$$



$(\cos\ , \sin\ )$



$g(t) = v(t)$

Kjerneregelen for parametriserte kurver

$\bar{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ $\quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

kurven (løype) $\quad$ funksjon (høyde o.h.)

$$g(t) = f(\bar{r}(t)) \quad : \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

løypeprofil

Kjerneregelen: $\quad g'(t) = \nabla f(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)$

∇f : gradienten til f : $\quad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$

f : h.o.h $\quad \nabla f$: uttrykker hvordan høyden endrer seg i alle retninger

$\bar{r}(t)$: løypa $\quad \bar{r}'(t)$: løyperetningen

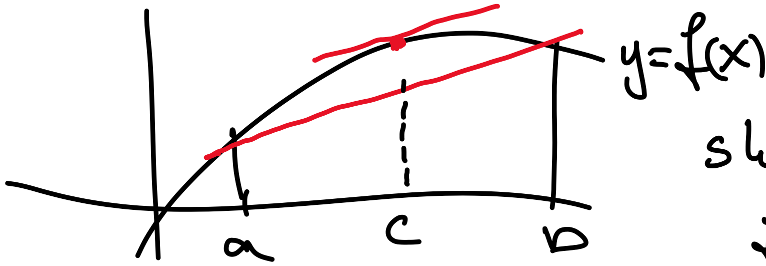
skalar-produkt: endring av høyden i løyperetningen.

Middelverdisetningen (MVS)

Minne om MVS for én variabel

$\forall$: for alle

$\exists$: det finnes



$\exists c \in [a,b]$ slik at

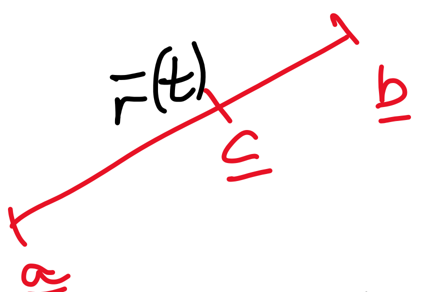
$$f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)$$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

- passe defn. område
- noh deriverbar
- $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^2$

$\exists\ \underline{c} \in \mathbb{R}^2$, på linjestykket mellom $\underline{a}$ og $\underline{b}$ slik at

$$f(\underline{b}) - f(\underline{a}) = \nabla f(\underline{c}) \cdot (\underline{b} - \underline{a})$$



Litt om beviset:

Introduserer $g(t) = f(\bar{r}(t))$ hvor

$\bar{r}(t) = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a}) \qquad 0 \le t \le 1$

$\bar{r}'(t) = \underline{b} - \underline{a}$

Kjerneregelen:

$$g'(t) = \nabla f(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)$$

1-variabel MVS sier at $\exists c \in [0,1]$ slik at

$$g(1) - g(0) = g'(c)(1-0) = g'(c)$$

$$f(\underline{b}) - f(\underline{a}) = \nabla f(\bar{r}(c)) \cdot \bar{r}'(c) = \nabla f(\underline{c})(\underline{b} - \underline{a})$$

$$\boxed{\underline{c} = \bar{r}(c)}$$

$$\boxed{\bar{r} \quad \cancel{\bar{F}}}$$