# Forelesning, 26. januar 2021

tirsdag 26. januar 2021 11:56

1. Repetisjon
2. Gradient
3. Integrere gradientfelt
4. Konservative felt
5. Finne potensialfunksjonen

---

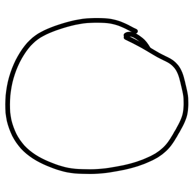
Gitt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ og $\bar{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$

funksjon          kurve i $\mathbb{R}^n$ : $\mathcal{C}$  $a \leq t \leq b$

Linjeintegralet av $f$ langs $\mathcal{C}$ :

$$\int_{\mathcal{C}} f \, ds = \int_a^b f(\bar{r}(t)) \, \|\bar{r}'(t)\| \, dt$$

**Eks**



$f(x,y) = x - y$

$$\int_{\mathcal{C}} f \, ds = \int_0^{2\pi} (\cos t - \sin t) \cdot 1 \, dt$$

$$= \left[ \sin t + \cos t \right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{0}}$$

$\mathcal{C} : \bar{r}(t) = (\cos t, \sin t)$

$0 \leq t \leq 2\pi$

$\bar{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$\|\bar{r}'(t)\| = 1$

---

$\bar{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$     kurve $\bar{r}(t)$   $a \leq t \leq b$

vektorfelt

Integralet av $\bar{G}$ langs $\mathcal{C}$ :

$$\int_C \bar{G}\cdot d\bar{r} = \int_a^b \bar{G}(\bar{r}(t))\cdot \bar{r}\,'(t)\,dt$$

Eks $\bar{G}(x,y) = (2y, -x)$

$\bar{r}(t) = (t, \tfrac{1}{2}t^2) \quad 0 \le t \le 1$

$\bar{r}\,'(t) = (1, t)$

$$\int_C \bar{G}\cdot d\bar{r} = \int_0^1 (t^2, -t)\cdot(1,t)\,dt = \int_0^1 (t^2 - t^2)\,dt = \underline{\underline{0}}$$

— o — o —

Gradient / gradientfelt

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$

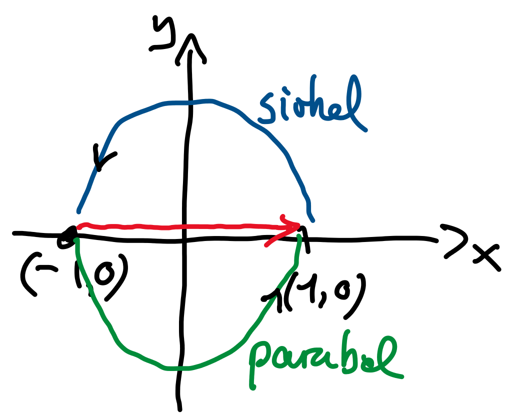
En vektor som i hvert punkt peker i den retningen funksjonen endrer seg mest.

Eks.

$f(x,y) = x^2 + 2xy$

$\nabla f(x,y) = (2x+2y, 2x)$

vektorfelt




$C_1: \bar{r}_1(t) = (t, 0) \quad -1 \le t \le 1 \qquad \bar{r}_1'(t) = (1,0)$

$C_2: \bar{r}_2(t) = (\cos t, \sin t) \quad 0 \le t \le \pi \qquad \bar{r}_2'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$C_3: \bar{r}_3(t) = (t, t^2 - 1) \quad -1 \le t \le 1 \qquad \bar{r}_3'(t) = (1, 2t)$

$$\int_{C_1} \nabla f \cdot d\bar{r} = \int_{-1}^1 (2t, 2t)\cdot(1,0)\,dt = \int_{-1}^1 2t\,dt = \left[t^2\right]_{-1}^1 = \underline{0}$$

$$\int \nabla f \cdot d\bar{r} = \int^{\pi} (2\cos t + 2\sin t, 2\cos t)\cdot(-\sin t, \cos t)\,dt$$

$C_2$

$$= \int_0^\pi -2\cos t \sin t - 2\sin^2 t + 2\cos^2 t \, dt \qquad = -0$$

$$= \int_0^\pi -\sin 2t + 2\cos 2t \, dt = \left[\tfrac{1}{2}\cos 2t + \sin 2t\right]_0^\pi = \underline{\underline{0}}$$

$$\int_{C_3} \nabla f \cdot d\bar{r} = \int_{-1}^{1} (2t + 2t^2 - 2,\ 2t)\cdot(1, 2t)\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} 2t + 2t^2 - 2 + 4t^2 \, dt = \underline{\underline{0}}$$

Alle er like!

Linjeintegralet av et gradientfelt avhenger kun av endepunktene!!

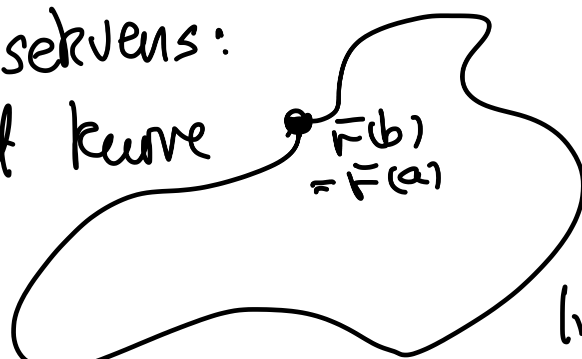
Bevis (del av bevis)

$$\int_C \nabla f \cdot d\bar{r} = \int_a^b \underbrace{\nabla f(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)}_{\frac{d}{dt} f(\bar{r}(t))} \, dt$$

$$= \underline{\underline{f(\bar{r}(b)) - f(\bar{r}(a))}}$$

Konsekvens:

Lukket kurve




$$\oint_C \nabla f \cdot d\bar{r} = f(\bar{r}(b)) - f(\bar{r}(a)) = \underline{\underline{0}}$$

Integralet av et gradientfelt langs en lukket kurve $= 0$

Eks

$$\varphi(x,y,z) = yz^2e^x \qquad \int_{\mathcal{C}} \nabla\varphi \cdot d\bar{r} =$$

$\mathcal{C}: \bar{r}(t) = (t, 2e^{-t}, t^2)$

$0 \le t \le 2$

$$= \varphi(\bar{r}(2)) - \varphi(\bar{r}(0))$$

$$= \varphi(2, 2e^{-2}, 4) - \varphi(0,2,0)$$

$$= 2\cancel{e^{-2}} \cdot 16 \cdot \cancel{e^{2}} - 2\cdot 0 \cdot e^0 = \underline{\underline{32}}$$

— o — o —

## 4. Konservative felt

$\nabla f$ er et eksempel på et

konservativt felt

$f$ er en potensial funksjon for $\nabla f$

Eks

Newtons gravitasjonslov

$$K = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$\gamma$: gravitasjons-konstant

$m_1, m_2$: massene til to legemer

$r$: avstanden mellom masse-sentrene

$\boxed{k = \gamma m_1 m_2}$

På vektorform

$$\bar{K}(x,y,z) = \frac{k}{x^2+y^2+z^2} \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$= \frac{k}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x,y,z)$$

Potensialfunksjon (skal vise at $\nabla\varphi = \bar{K}$)

$$\varphi(x,y,z) = -\frac{k}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = -k(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$

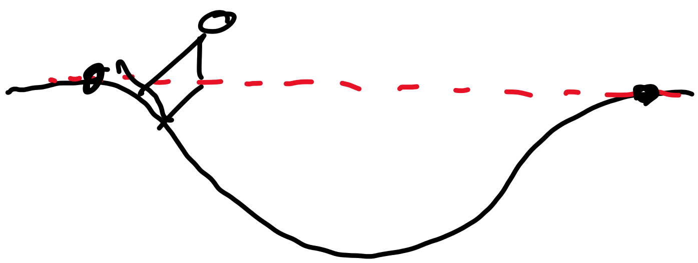
$$\nabla\varphi(x,y,z) = -k\left(-\tfrac{1}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(2x,2y,2z)$$

$$= k\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(x,y,z) = \overline{K}(x,y,z)$$

Gravitasjonsfeltet $\overline{K} = \nabla\varphi$

$\Rightarrow$ Gravitasjonsfeltet er konservativt

Integrasjon av gravitasjonsfeltet langs en kurve avhenger bare av endepunktene til kurven.



Samme høyde dvs samme $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Konservativt : konserver noe

Hva er et konservativt felt?

$f(x,y)$ ; $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (G_1, G_2)$

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Definisjon av konservativt felt:

$$\bar{G} = (G_1, \dots, G_n) \overset{\text{def}}{\iff} \frac{\partial G_i}{\partial x_j} = \frac{\partial G_j}{\partial x_i} \text{ for alle } i,j$$
konservativt

Ikke helt riktig!!

Riktig definisjon:

$$\bar{G} = (G_1, \dots, G_n) \overset{\text{def}}{\iff} \bar{G} = \nabla f$$
konservativt

De to definisjonene er nesten alltid ekvivalente

Vi vet at $\oint_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot d\bar{r} = 0$


Snurper inn kurvene til ett punkt.

Problem: Hvis definisjonsområdet for $\bar{G}$ mangler et punkt.

Eks.

$$\bar{G}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

Vi kan ikke sette inn $(x,y) = (0,0)$

$$\left(\text{"}\bar{G}(0,0) = (-\infty, \infty)\text{"}\right)$$

Årsaken

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = -\frac{(x^2+y^2)\cdot 1 - y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)\cdot 1 - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Så $\boxed{\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial G_2}{\partial x}}$

Regne ut integralet av $\bar{G}$ langs $\bar{r}(t) = (\cos t, \sin t)$

$0 \leq t \leq 2\pi$

$$\int_C \bar{G}\cdot d\bar{r} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t+\sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\right)\cdot(-\sin t, \cos t)\, dt$$

$\cos^2 t+\sin^2 t=1$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi$$

Dette betyr at $\bar{G} \neq \nabla f$

ikke konservativt,

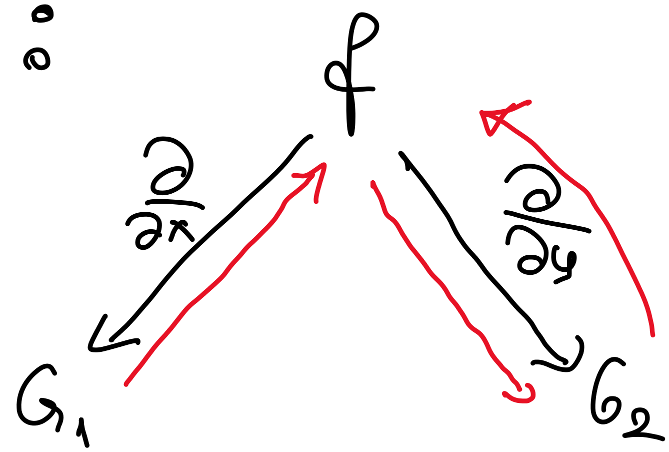
men $\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial G_2}{\partial x}$

Derson definisjonsområdet er enkeltsammenhengende (uten $(\infty, \infty)$-hull) så er de to definisjonene ekvivalente.

5. Hvis $\bar{G}$ er konservativt, dvs $\bar{G} = \nabla f$ hvordan finner vi $f$?

Framgangsmåte i to variable $(x,y)$:

$$\bar{G} = (G_1, G_2)$$
$$G_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad G_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$$




Eks $G(x,y) = (3x^2 - 6xy, -3x^2 + 3y^2)$

Sjekke at $\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial G_2}{\partial x}$ : $\frac{\partial G_1}{\partial y} = -6x$ $\frac{\partial G_2}{\partial x} = -6x$

$$\int 3x^2 - 6xy \, dx = x^3 - 3x^2 y + h(y)$$

"integrasjons-konstant"

Deriverer mhp $y$:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3 - 3x^2 \ldots$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 - 3x^2 y + h(y)\right) = -3x^2 + h'(y)$$

Krever $= -3x^2 + 3y^2$

Som betyr at $h'(y) = 3y^2$

eller $h(y) = y^3 + C$

dvs $$f(x,y) = \underline{\underline{x^3 - 3x^2 y + y^3 + C}}$$

Dette er en potensial funksjon fordi

$$\underline{\underline{\nabla f = \bar{G}}}$$