Forelesning, 15. februar 2021

mandag 15. februar 2021 10:23

Vektorfelt og strømningslinjer

Illustrere vektorfelt ved pildiagrammer

$\bar{G}(x,y) = (2x+y, -3x-2y)$

vektorfelt

Strømningslinjer for $\bar{G}$:

Parametrisert kurve $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$ som oppfyller

$$\bar{r}'(t) = \bar{G}(\bar{r}(t))$$

Hastigheten er parallell med feltet.

Typiske (anvendte) eksempler:

1) Kraftfelt:
   Strømningslinjen er banen til en partikkel som utsettes for kraftfeltet.

2) Fasediagram:
   To størrelser som vekselvirker, gjensidig avhengig av hverandre

Eks: a) En liten øy med kaniner og rever. Størrelsen er bestandene.

b) Størrelsene beskriver konsentrasjoner av kjemiske stoffer som reagerer med hverandre.

Lineære vektorfelt:

$$G(x,y) = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Stasjonært punkt (likevektspunkt):

Et punkt (x,y) slik at $G(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Ingen strømningslinjer går ut av et stasjonært punkt.}}$

Lineære vektorfelt $\longleftrightarrow$ 2x2-matriser

$$G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad A$$

—— o —— o ——

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

2x2-matrise

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}$$

Karakteristisk polynom

$$\chi_A(\lambda) = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$
$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$$

2. gradslikning i λ, abc-formelen:

$$\lambda = \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

$$= \frac{a+d}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\mathcal{D}}$$

hvor $$\mathcal{D} = (a+d)^2 - 4(ad-bc)$$
$$= a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4bc$$
(2. kv. set) $$= a^2 - 2ad + d^2 + 4bc$$
$$= (a-d)^2 + 4bc$$

Diskriminanten til det lineære feltet

Eks.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$a = 2$ $b = 1$
$c = -3$ $d = -2$

$$\mathcal{D} = (a-d)^2 + 4bc$$
$$= (2-(-2))^2 + 4 \cdot 1(-3)$$
$$= 16 - 12 = 4 > 0$$

$\boxed{\mathcal{D} > 0}$

Egenverdier

$$\lambda = \frac{a+d}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\mathcal{D}}$$
$$= 0 \pm \frac{1}{2} 2 = \pm 1$$

$$\boxed{\lambda_1 < 0 < \lambda_2}$$

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1$$

Eks. 2

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= (a-d)^2 + 4bc \\ &= (-1-(-1))^2 + 4(-2)\cdot 2 \\ &= 0 - 16 = -16 < 0 \end{aligned}$$

Egenverdier

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{D} < 0 \\ \frac{a+d}{2} = -1 < 0 \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{a+d}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\mathcal{D}} \\ &= \frac{-1-1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-16} \\ &= -1 \pm 2i \end{aligned}$$

Eks 3

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{D} = 16 \quad \lambda_1 = -5 \quad \lambda_2 = -1$$

$$\boxed{\mathcal{D} > 0 \quad \lambda_1, \lambda_2 < 0}$$

Eks 4

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{D} = 36 \quad \lambda_1 = 7 \quad \lambda_2 = 1$$

$$\boxed{\mathcal{D} > 0 \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0}$$

Lineært vektorfelt: $\bar{G}$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{D} = (a-d)^2 + 4bc$$

$$\lambda = \frac{a+d}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\mathcal{D}}$$

3 tall som gir mye informasjon om $\bar{G}$.

1) $\mathcal{D} > 0$ $\quad \lambda_1, \lambda_2 > 0$ $\quad$ Frastøtende / Repellor / Ustabil likevekt

2) $\mathcal{D} > 0$ $\quad \lambda_1, \lambda_2 < 0$ $\quad$ Tiltrekker / Attraktor / Stabil likevekt

3) $\mathcal{D} > 0$ $\quad \lambda_1 < 0 < \lambda_2$ $\quad$ Bifurkasjon

4) $\mathcal{D} < 0$ $\quad \frac{a+d}{2} < 0$ $\quad$ Innoverrettet spiral

5) $\mathcal{D} < 0$ $\quad \frac{a+d}{2} > 0$ $\quad$ Utoverrettet spiral

Ikke-lineært vektorfelt.

Kanin/rev-system

Lotka-Volterra-modell

$$\bar{G}\begin{pmatrix} x \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5x - xy \\ \end{pmatrix}$$

Dobbelt autokatalytisk reaksjon $G(y) = \begin{pmatrix} xy - 0.2y \end{pmatrix}$

Nytt eksempel: Brusselator !

Brussel - Oscillator

Ilya Prigogine
1917 - ?
Nobelpris i kjemi 1977

$A \longrightarrow X$

$2X + Y \longrightarrow 3X$

$B + X \longrightarrow Y + D$

$X \longrightarrow E$

$$\bar{G}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + x^2y - bx - x \\ bx - x^2y \end{pmatrix}$$

stasjonært punkt $\bar{G}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$x = a \quad y = \frac{b}{a}$$

stasjonært punkt er ustabilt (frastøter) når $b > 1 + a^2$

Kjent eksempel:
BZ-reaksjon.
(skifter farge hvert 23.(?) sekund.)

$$\bar{G}(x,y) = (a + x^2y - bx - x, \; bx - x^2y)$$

stasjonært pkt $x = a, y = \frac{b}{a}$

Linearisering av vektorfelt $\bar{G}(x,y) = (G_1, G_2)$

Regne ut $\begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x} & \frac{\partial G_1}{\partial y} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} & \frac{\partial G_2}{\partial y} \end{pmatrix}$ evalueres i punktet $(a, \frac{b}{a})$

$$\left(\quad \partial x \quad \partial y \quad \right)$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial x} = 2xy - b - 1 \qquad \frac{\partial G_1}{\partial y} = x^2$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} = b - 2xy \qquad \frac{\partial G_2}{\partial y} = -x^2$$

setter inn $x = a$ $y = \frac{b}{a}$

$$\frac{\partial G_1}{\partial x}\left(a, \frac{b}{a}\right) = 2 \cdot \cancel{a} \cdot \frac{b}{\cancel{a}} - b - 1 \qquad \frac{\partial G_1}{\partial y}\left(a, \frac{b}{a}\right) = a^2$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial x}\left(a, \frac{b}{a}\right) = b - 2\cancel{a} \cdot \frac{b}{\cancel{a}} \qquad \frac{\partial G_2}{\partial y}\left(a, \frac{b}{a}\right) = -a^2$$

Dette gir
$$\begin{pmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{pmatrix}$$

Lineariser
$$G\begin{pmatrix} a \\ \frac{b}{a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-\frac{b}{a} \end{pmatrix}$$

$$= \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-\frac{b}{a} \end{pmatrix}$$

Lineariseringen er et lineært vektorfelt.
Kan bruke kunnskapen om lineære vektorfelt
til å avgjøre hvordan brusselatoren ser
ut i nærheten av det stasjonære punktet.

Sjekke for brusselatoren:

$$\begin{pmatrix} b-1 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} \text{[illegible]} & \text{[illegible]} \\ -b & -a^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{D} = \left(b-1-(-a^2)\right)^2 + 4 \cdot a^2(-b)$$

$$= \underline{(b-1+a^2)^2 - 4a^2 b}$$

$$\underline{\lambda = \frac{b-1-a^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\mathcal{D}}}$$

Anta $\mathcal{D} < 0$

$$b-1-a^2 < 0$$

$b < 1+a^2$ innoverettet

$\underline{\underline{b > 1+a^2}}$ utoverettet