Forelesning, 16. februar 2021

tirsdag 16. februar 2021 12:17

Lineære kombinasjoner, lineær uavhengighet, basiser, underrom

Lineær kombinasjon:

$\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \in \mathbb{R}^m \qquad a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_1\bar{v}_n$

$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

Eks

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(tilfeldig valgt)}$$

Vi har (f.eks) at

$$\underbrace{2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{lin. komb. av } \bar{v}_1 \text{ og } \bar{v}_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Motsatt, kan vi skrive

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Som en lineær kombinasjon av $\bar{v}_1$ og $\bar{v}_2$ (som gitt over) hvor $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$.

Dvs. Vi må løse

$$1 = x_1 + \cancel{x_2 0}$$
$$3 = 2x_1 + x_2$$
$$-1 = \cancel{0x_1} - x_2$$

m.h.p x_1 og x_2

Løsning: $\underline{\underline{x_1 = 1,\ x_2 = 1}}$

Hva skal til for at alle vektorer i $\mathbb{R}^3$ kan skrives som lineær kombinasjoner av et sett av vektorer?

Nødvendig betingelse: Trenger minst 3

En annen betingelse: lineær <u>uavhengighet</u>

<u>Definisjon</u>

$\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \in \mathbb{R}^m$ lineært uavhengige $\iff$ Hvis $a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n = 0$ så er $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

$\Updownarrow$

$\bar{b} = a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n$

og $\bar{b} = a_1'\bar{v}_1 + \dots + a_n'\bar{v}_n$

$\Rightarrow a_1 = a_1',\ a_2 = a_2', \dots a_n = a_n'$

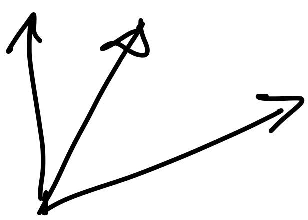
Se på $\bar{b} - \bar{b} = 0$.

$0 = \bar{b} - \bar{b} = (a_1 - a_1')\bar{v}_1 + \dots + (a_n - a_n')\bar{v}_n$

<u>Eks</u> $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ fordi $a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 + a_2 \\ -a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

lineært uavh.

$\Rightarrow a_1 = a_2 = 0$.



(3 retninger)

<u>Setning</u>

$$A = \left(\bar{v}_1 \,\vdots\, \bar{v}_2 \,\vdots \cdots \vdots\, \bar{v}_n \right) \qquad \bar{v}_i \in \mathbb{R}^m$$

En $m \times n$-matrise hvor $\bar{v}_i$-ene er søylene

Hvis $n=m$ så har (*) en entydig løsning dersom A er inverterbar

$$a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_n\bar{v}_n = 0 \Leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (0) \quad (*)$$

lin. uavh. $\Leftrightarrow$ entydig løsn.

Setning 4.6.10

Gitt $V = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$. Da kan vi finne en delmengde $W \subset V$ som er lineært uavhengig.

Bevis. Enten er V lin. uavh. eller ikke. Hvis den er lin. uavh., så $W = V$. (ferdig)

Hvis ikke:

$$a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_n\bar{v}_n = 0$$ og ikke alle a_i lik 0.

Anta $a_n \neq 0$

$$-\frac{a_1}{a_n}\bar{v}_1 - \frac{a_2}{a_n}\bar{v}_2 - \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n}v_{n-1} = \bar{v}_n$$

Dropp $\bar{v}_n$ fra V. Ny $V = V \setminus \{\bar{v}_n\}$

Gjenta helt det stopper.

Bruke MATLAB:

Eks

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \bar{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \left(\bar{v}_1 \,\vdots \cdots \vdots\, \bar{v}_4 \right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$A = (v_1 \vdots \cdots \vdots v_4) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ 5×4-matrise

Kommando: rref(A)

MATLAB gir svar: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. søyle = 1. søyle − 2. søyle

Da har vi: $\bar{v}_3 = \bar{v}_1 - \bar{v}_2$

sjekk: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ stemmer

Basis

$\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ **basis** for $\mathbb{R}^m$

Dersom

$\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ lineært uavhengig

$\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ utspenner hele $\mathbb{R}^m$

$\Longrightarrow \boxed{n = m}$

Eks.

standardbasis for $\mathbb{R}^4$: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Karakteristikk av basis:

Karakteristikk av

$\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \left(\bar{v}_1 \vdots \cdots \vdots \bar{v}_n\right)$ invertibel.

(n stykker i $\mathbb{R}^n$)

lineært uavhengig

rett antall

utspenner hele

Basis : 2 av 3 !!

sетning 4.6.15.

$\bar{v}_1, \dots \bar{v}_m \in \mathbb{R}^n$ $m < n$ lineært uavh.

Da kan vi finne $\bar{v}_{m+1}, \dots, \bar{v}_n$ slik at $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ basis

I praksis:

$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

lin. uavh.
ikke basis for $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{l_3 = l_3 - l_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{l_2 - 3l_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{l_2 = -l_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{l_3 + 7l_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Føyer til $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

og reverser prosessen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{l_3 - 7l_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{l_2 = -l_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{l_2 + 3l_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{l_3 = l_3 + l_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

Lineæravbildninger og basiser

1) En lineæravbildning er bestemt av sine verdier på en basis

$$T(a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n\bar{v}_n)$$
$$= a_1 T(\bar{v}_1) + a_2 T(\bar{v}_2) + \dots + a_n T(\bar{v}_n)$$

2) $\underbrace{\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}}_{\text{basis}} \subset \mathbb{R}^n \qquad \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n \in \mathbb{R}^m$

Da finnes en lineæravbildning

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

slik at $T(\bar{v}_i) = \bar{w}_i$.

— o — o —

Underrom

1) Vektorrom som ligger inni et annet vektorrom.

2) $\{\bar{v}_1, \dots \bar{v}_n\} \subset \mathbb{R}^m \quad n < m$

a) $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ ...

$Sp\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} = \{a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$

danner et underrom.

Eks.

$$\underset{\underline{a}}{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}} \in \mathbb{R}^3 \qquad H = \left\{ \underset{\underline{x}}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\} \qquad \underline{x} \cdot \underline{a} = 0$$

Underrom

(ortogonale komplementet til $\underline{a}$)

$\underline{x} \cdot \underline{a} = 0$

$\underline{y} \cdot \underline{a} = 0$

$\Rightarrow (\underline{x} + \underline{y}) \cdot \underline{a} = \underline{x} \cdot \underline{a} + \underline{y} \cdot \underline{a} = 0 + 0 = 0$

$c \in \mathbb{R} \quad (c\underline{x}) \cdot a = c \cdot (\underline{x} \cdot \underline{a}) = c \cdot 0 = 0$.

— o — o —

$U \subset \mathbb{R}^n$: Da vil alle basiser for
underrom

U ha like mange elementer

$\rightsquigarrow$ Kalles dimensjonen til U.

$\Longrightarrow$ dimensjonen til $\mathbb{R}^n$ er n. (standard basis)

Ortogonal basis (ortonormal basis)

$\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$

slik at $\bar{v}_i \cdot \bar{v}_j = 0$

; Tilleggskrav.

$\bar{v}_i \cdot \bar{v}_i = 1$.

Eks

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ortogonal (ortonormal)

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0 .$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$
ortonormal basis

$\underline{b} \in \mathbb{R}^3$ skriv $\underline{b} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + a_3\bar{v}_3$

Enkelt fordi : $\underline{b} \cdot \bar{v}_1 = (a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + a_3\bar{v}_3) \cdot \bar{v}_1$

$$= a_1 \underbrace{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1}_{=1} + a_2 \underbrace{\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_1}_{=0} + a_3 \underbrace{\bar{v}_3 \cdot \bar{v}_1}_{=0}$$

$$= a_1$$

$$\Rightarrow \underline{b} = (\underline{b} \cdot \bar{v}_1) \cdot \bar{v}_1 + (\underline{b} \cdot \bar{v}_2) \cdot \bar{v}_2 + (\underline{b} \cdot \bar{v}_3) \bar{v}_3$$

$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$
basis
(ikke ortogonal)

$\rightsquigarrow$ Lage en ortonormal basis: $\{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3\}$

$$\bar{w}_1 = \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|}$$

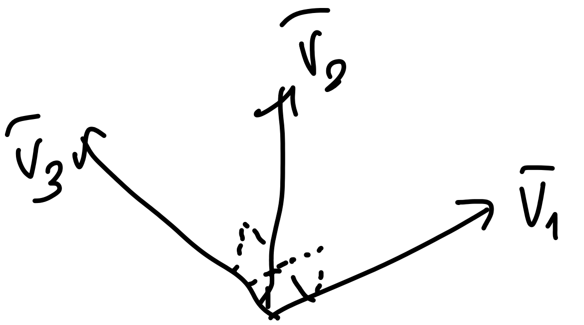
$$\bar{w}_2 = (\bar{v}_2 - (\bar{v}_2 \cdot \bar{w}_1) \cdot \bar{w}_1) / \ldots$$

// dele på lengden

Da har vi $\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_2 = \bar{w}_1 \cdot \bar{v}_2 - (\bar{v}_2 \cdot \bar{w}_1)(\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_1)$ / lengden

$= \bar{w}_1 \cdot \bar{v}_2 - \bar{v}_2 \cdot \bar{w}_1$ / lengden $= 0$.

$\bar{w}_3 = (\bar{v}_3 - (\bar{v}_3 \cdot \bar{w}_1)\bar{w}_1 - (\bar{v}_3 \cdot \bar{w}_2)\bar{w}_2)$ / lengden



Rotasjon av koordinataksene.