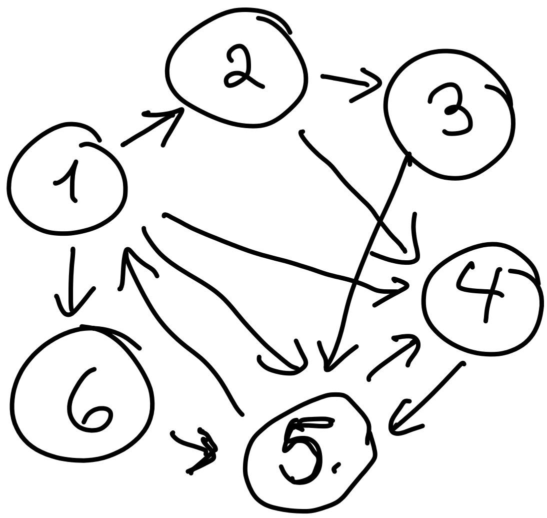
Forelesning, 23. februar 2021

tirsdag 23. februar 2021 12:16

Egenverdier og egenvektorer

Spektralteori

Googles PageRank.



Link-diagram

Hvilken side er mest populær?

$\Rightarrow$ Rangering ved søk.

Link-matrise:

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{ut} \\
A = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{inn}
\end{array}
$$

Finne egenverdier og egenvektorer for A

(søylesummene er 1, dvs A er stokastisk, $\Rightarrow \lambda = 1$ egenverdi)

Tilhørende egenvektor:

$$
v = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{11}{2} \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Google:

5, 4, 1, 2, 6, 3

Generell definisjon

A $n \times n$-matrise

$\underline{0} \neq \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ kalles en egenvektor for A

$\Updownarrow$

$A \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$ for en $\lambda \in \mathbb{R}$

tilhørende egenverdien

Merk:

* $\underline{v}$ er en egenvektor for A med egenverdi λ så er også $b \cdot \underline{v}$, $b \overset{\neq 0}{\in} \mathbb{R}$ en egenvektor med samme egenverdi

$$A(b\underline{v}) = b \cdot A\underline{v} = b\lambda\underline{v} = \lambda(b\underline{v})$$

* $\underline{v} = 0$ er pr. konvensjon ikke en egenvektor
* 

Egenrom: rommet av egenvektorer.
* I definisjonen kan vi bytte ut $\mathbb{R}$ med $\mathbb{C}$, dvs komplekse egenverdier/egenvektorer

Hvordan finner vi egenverdiene?

$$A\underline{v} = \lambda \cdot \underline{v} = \lambda I \cdot \underline{v}$$

$$\Updownarrow$$

$$(A - \lambda I) \cdot \underline{v} = 0 \qquad \underline{v} \neq 0$$

Ex. $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda \underline{v} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$

$\lambda I \cdot \underline{v} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{v}$ er en ikke-null løsning av den homogene matriselikningen

$$\Longleftrightarrow \quad \det(A-\lambda I) = 0$$

$$\overset{\shortparallel}{\chi_A(\lambda)}$$

Karakteristiske polynomet til A

Eks.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$= \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$= (4-\lambda)(-2-\lambda) - (-1)\cdot 5 = 0$$

$$= -8 - 4\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 5 = 0$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

Finne λ ved abc-formelen.

$$\underline{\lambda_1 = 3} \qquad \underline{\lambda_2 = -1}$$

$\underline{\lambda_1 = 3}$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4x - y \\ 5x - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 4x - y = 3x \\ 5x - 2y = 3y \end{matrix}$$

Likningene i x, y:

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 2x - 2y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad x = y$$

Egenvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

basis-element for egenrommet

$\underline{\lambda_2 = -1}$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$4x - y = -x$$
$$5x - 2y = -y$$

dvs $\left.\begin{aligned} 5x - y &= 0 \\ 5x - y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad y = 5x$

Egenvektor: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 5x \end{pmatrix} = x \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}}}$

Generell oppskrift:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$= \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \end{pmatrix}$

$$= \det\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$$

For $n=2$: Setning 4.10.4

A 2x2-matrise

$$A\underline{v}_1 = \lambda_1 \underline{v}_1$$

$$A\underline{v}_2 = \lambda_2 \cdot \underline{v}_2$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

$\Longrightarrow \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ er lineært uavhengig

Bevis Anta motsatt, $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ er lineært avhengig dvs.

$$c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 = 0 \qquad (c_1, c_2) \neq (0,0)$$

Ganger med A:

$$A c_1 \underline{v}_1 + A c_2 \underline{v}_2 = A \cdot 0 = 0.$$

$$\parallel$$

$$c_1 \lambda_1 \underline{v}_1 + c_2 \lambda_2 \underline{v}_2 = 0$$

To likninger:

$$c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 = 0 \qquad | \cdot (-\lambda_1)$$

$$c_1 \lambda_1 \underline{v}_1 + c_2 \lambda_2 \underline{v}_2 = 0$$

$$0 + (c_2\lambda_2 - c_2\lambda_1)\underline{v}_2 = 0$$

dvs $c_2(\lambda_2 - \lambda_1)\underline{v}_2 = 0$

$$\underbrace{c_2(\lambda_2-\lambda_1)}_{\neq 0}\underbrace{v_2}_{\neq 0} = 0$$

$$\Rightarrow c_2 = 0$$

Derfor $\underbrace{c_1 \underline{v}_1}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ $\blacksquare$

Konsekvens:

Dersom vi har n forskjellige egenverdier for en $n\times n$-matrise så $\exists$ basis av egenvektorer

<u>Eksempler</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 0-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(-\lambda) - (-1\cdot 1)$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

abc-formel: $\lambda = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1$

Kun én egenverdi

<u>$\lambda = 1$</u>

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= x \\ x &= y \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x - y &= 0 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

Egenvektor: $\begin{pmatrix} x \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

Finnes ikke noen basis av egenvektorer.

Eksempel

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ -6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -5-\lambda & 3 & 3 \\ -6 & 4-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-5-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda) + \cancel{3\cdot 3\cdot 0} + \cancel{3(-6)\cdot 0}$$
$$- 3\cancel{(4-\lambda)\cdot 0} - 3(-6)(1-\lambda) - \cancel{(-5-\lambda)\cdot 3\cdot 0}$$

$$= (1-\lambda)\big((-5-\lambda)(4-\lambda) + 3\cdot 6\big)$$

$$= (1-\lambda)\left(-20 + 5\lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 18\right)$$

$$= (1-\lambda)\left(\lambda^2 + \lambda - 2\right)$$

abc-formel $= (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+2) = 0$

To egenverdier $\lambda_1 = 1$ $\quad \lambda_2 = -2$

Multiplisitet 2 $\quad$ Multiplisitet 1.

Hva med egenvektorer?

$\underline{\lambda_1 = 1}$

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ -6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

dvs. $$\begin{aligned} -5x+3y+3z &= x \\ -6x+4y+3z &= y \\ z &= z \end{aligned}$$

Forenkle: $$\begin{aligned} -6x+3y+3z &= 0 \\ -6x+3y+3z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$ Like

Deler med 3: $-2x+y+z=0 \Rightarrow z=2x-y$

dvs $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x-y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2-dimensjonalt egenrom.

$\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ -6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Regner ut ...... $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I dette tilfellet har vi en basis av egenvektorer: $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oppsummert:

A — n forskjellige egenverdier
$n \times n$-matrise $\Rightarrow \exists$ basis av egenvektorer

— færre egenverdier: kan ha / kan ikke ha } basis av egenvektorer

I utgangspunktet kan vi ikke vite

— o — o —

Vi må være åpne for komplekse egenverdier

Eks (komplekse egenverdier)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(1-\lambda) - (-2)\cdot 2$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

abc-formel:

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 5}}{2}$$

$$= 1 \pm \frac{\sqrt{-16}}{2} = 1 \pm \frac{4}{2}\sqrt{-1}$$

$$= \underline{\underline{1 \pm 2i}}$$

$\underline{\lambda_1 = 1 + 2i}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1+2i)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\cancel{x} - \cancel{2}y = (1+2i)x = \cancel{x} + \cancel{2}ix$$
$$\cancel{2}x + \cancel{y} = (1+2i)y = \cancel{y} + \cancel{2}iy$$

dvs $\quad y = -ix$

$$x = iy \quad | \cdot -i \qquad -ix = -i \cdot i y = y$$

Egenvektor: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iy \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

Symmetriske matriser: $\quad (A^T = A)$

Eks. $\underset{2\times 2}{A} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & d-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (a-\lambda)(d-\lambda) - b^2$$
$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2 = 0$$

abc.

$$\lambda = \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-b^2)}}{2}$$
$$= \frac{a+d \pm \sqrt{a^2 + \cancel{2ad} + d^2 - \cancel{4}2ad + 4b^2}}{2}$$
$$= \frac{a+d \pm \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad + 4b^2}}{2}$$
$$= \frac{a+d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2}$$

$$= \frac{a+d \pm \sqrt{(a-d)^2+4b^2}}{2}$$

Diskriminanten (under rottegnet)

$$(a-d)^2 + 4b^2 > 0$$

Egenverdiene er reelle tall

Spektralteoremet for symmetriske matriser

A
$n \times n$-matrise
Symmetrisk

$\Rightarrow$ Alle egenverdiene til A er reelle

og

det finnes en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ av egenvektorer

$$\begin{cases} \underline{v}_i \cdot \underline{v}_j = 0 & i \neq j \\ \underline{v}_i \cdot \underline{v}_i = 1 \end{cases}$$