Eksamen MAT 1110, 4. juni 2021
Løsningsforslag

Oppgave 1

a) Forklar hva vi mener med at en rekke er betinget konvergent og gi et eksempel på en betinget konvergent rekke som ikke konvergerer absolutt. (4 poeng)

> **Løsning.**
> En rekke $\sum a_n$ er betinget konvergent dersom den konvergerer, men rekka $\sum |a_n|$ ikke konvergerer. Et eksempel er den alternerende harmoniske rekka $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$.

b) Hva er konvergensradien til rekka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ der $a_1 = x$ og $a_{n+1} = -\frac{n+1}{n}\frac{x}{k}a_n$ fro $n \geq 1$ (5 poeng)?

> **Løsning.**
> Vi bruker forholdstesten på rekka;
>
> $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{-\frac{n+1}{n}\frac{x}{k}a_n}{a_n}\right| = \left|\frac{n+1}{n}\frac{x}{k}\right| \to \left|\frac{x}{k}\right|$$
>
> når $n \to \infty$. Forholdstesten sier at rekka konvergerer når denne grenseverdien er mindre enn 1, dvs. $|x| < |k|$, og divergerer når $|x| > |k|$. Konvergensradien er derfor $|k|$.

c) Vis at

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{nx^n}{2^{n-1}} = -\frac{4x}{(2+x)^2}$$

i rekkas konvergensområde. (6 poeng)

Løsning.
Vi tar utgangspunkt i

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x}{2})^n = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^{n-1}}$$

Derivasjon av venstresiden gir

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2+x}\right) = -\frac{1}{(2+x)^2}$$

På det indre av konvergensområdet kan vi derivere ledd for ledd, det gir for høyresiden;

$$\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{nx^{n-1}}{2^{n-1}}$$

Multipliserer vi begge uttrykkene med $4x$ får vi

$$-\frac{4x}{(2+x)^2} = 4x \cdot \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{nx^{n-1}}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{nx^n}{2^{n-1}}$$

Oppgave 2

a) La A være et lukket og begrenset område i $\mathbb{R}^2$, og la $f : A \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon på A, som er deriverbar på det indre av A. I følge ekstremalverdisetningen vil funksjonen ha et maksimumspunkt og et minimumspunkt i A. Forklar hvordan vi går fram for å finne disse ekstremalpunktene. (4 poeng)

Løsning.
Først leter vi opp stasjonære punkter i det indre av A, ved å sette de partiellderiverte lik 0. Dernest sjekker vi typen av de stasjonære punktene er ved å regne Hesse-matrisen for punktene. Andrederivert-testen gir svar på om punktene er lokale maksimums-, minmums- eller sadelpunkter. Neste step er å sjekke for ekstremalpunkter på randa til A. Det gjør vi med Lagranges multiplikatormetode med likningen(e) til randa som bibetingelse(r). Til slutt sammenligner vi verdiene vi har funnet over og avgjør hvilke som er størst og minst.

b) Vi har gitt en funksjon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ med at stasjonært punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$. For å avgjøre hva slags punkt det stasjonære punktet er, regner vi ut Hesse-matrisen $\mathrm{H}f(\mathbf{a})$ i det stasjonære punktet. Vi finner at det karakteristiske polynomet til Hesse-matrisen er gitt ved $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$. Hva slags stasjonært punkt er $\mathbf{a}$? Begrunn svaret. (5 poeng)

Løsning.
Vi setter $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ og finner egenverdiene $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 2$. Andrederiverttesten sier at dersom begge egenverdiene til Hessematrisen er positive, så er det stasjonære punktet et minimumspunkt.

c) Et plan P i $\mathbb{R}^3$ er gitt ved $ax + by + cz = d$ hvor $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Bruk Lagranges multiplikatormetode til å finne den minste avstanden fra origo til planet P ved å finne minimum for funksjonen $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ over P. (5 poeng)

Løsning.
Funksjonen vi skal minimere er gitt ved $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ og bibetingelsen er gitt ved $g(x,y,z) = ax + by + cz - d$. Lagranges metode sier at vi skal sette

$$\nabla f = \lambda \cdot \nabla g$$

og $g(x,y,z) = 0$. Det gir

$$2x = \lambda a, \quad 2y = \lambda b, \quad 2z = \lambda c, \quad ax + by + cz = d$$

og ved å eliminere λ,

$$y = \frac{b}{a}x, \quad z = \frac{c}{a}, \quad ax + b\frac{b}{a}x + c\frac{c}{a}x = d$$

Her har vi antatt at $a \neq 0$. Vi kunne gjort tilsvarende regning ved å anta at $b \neq 0$ eller at $c \neq 0$. Dette går bra siden vi ikke kan ha $a = b = c = 0$.
Multipliserer vi den siste likningen med a får vi

$$a^2x + b^2x + c^2x = x = ad$$

Avstanden er gitt ved

$$\begin{aligned} \sqrt{f(ad, bd.cd)} &= \sqrt{(ad)^2 + (bd)^2 + (cd)^2} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)d^2} = |d| \end{aligned}$$

Oppgave 3

La A være en 2×2-matrise gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

der a, b og d er reelle tall.

a) Finn egenverdiene til A uttrykt ved a, b og d, og forklar hvorfor egenverdiene må være relle. (6 poeng)

Løsning.

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & d-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a-\lambda)(d-\lambda)-b^2 \\ &= \lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-b^2)=0\end{aligned}$$

gir egenverdier

$$\lambda = \frac{(a+d)\pm\sqrt{(a+d)^2-4(ad-b^2)}}{2} = \frac{(a+d)\pm\sqrt{(a-d)^2+4b^2}}{2}$$

Siden uttrykket under rottegnet er en sum av to kvadrater vil det være større enn eller lik 0, og egenverdiene er reelle. Alternativ kan vi basere oss på spektralteoremet for symmetriske matriser som sier at symmetriske matriser har reelle egenverdier.

b) La

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{15} \\ \frac{4}{15} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Regn ut egenverdiene til $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{15} \\ \frac{4}{15} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ og finn en basis av egenvektorer. (4 poeng)

Løsning.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{5}-\lambda & \frac{4}{15} \\ \frac{4}{15} & -\frac{1}{5}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+(-\frac{1}{25}-\frac{16}{225}) = \lambda^2-\frac{25}{225} = \lambda^2-\frac{1}{9}$$

som gir egenverdier $\lambda = \pm\frac{1}{3}$. Løsning av

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5}\pm\frac{1}{3} & \frac{4}{15} \\ \frac{4}{15} & -\frac{1}{5}\pm\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gir basisvektor $(1,-2)$ for egenrommet til $\lambda = \frac{1}{3}$ og $(2,1)$ for egenrommet til $\lambda = -\frac{1}{3}$.

c) Forklar hva vi mener med at en funksjon er en kontraksjon og vis at funksjonen $\mathbf{F}$ i oppgave 3b) er en kontraksjon på $\mathbb{R}^2$. (5 poeng)

Løsning.
En funksjon $\mathbf{F}$ er en kontraksjon dersom for alle $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$, så er

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{y}) - \mathbf{F}(\mathbf{x})\| \leq C \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$$

hvor $C < 1$. Et kriterium for at $\mathbf{F} = (f_1, f_2)$ er en kontraksjon er at

$$\|\nabla f_1(\mathbf{c}_1)\|^2 + \|\nabla f_2(\mathbf{c}_2)\|^2 < 1$$

for alle $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in \mathbb{R}^2$. I vårt tilfelle har vi

$$\nabla f_1(\mathbf{c}_1) = (\frac{1}{5}, \frac{4}{15}), \quad \nabla f_2(\mathbf{c}_2) = (\frac{4}{15}, -\frac{1}{5})$$

som gir

$$\begin{aligned}\|\nabla f_1(\mathbf{c}_1)\|^2 + \|\nabla f_2(\mathbf{c}_2)\|^2 &= (\frac{1}{5})^2 + (\frac{4}{15})^2 + (\frac{4}{15})^2 + (-\frac{1}{5})^2 \\ &= \frac{3^2 + 4^2 + 4^2 + 3^2}{15^2} = \frac{50}{225} = \frac{2}{9} < 1\end{aligned}$$

d) Siden $\mathbf{F}$ er en kontraksjon på $\mathbb{R}^2$ vet vi at følgen

$$\mathbf{z}_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}) = \mathbf{F}(x_n, y_n) = \mathbf{F}(\mathbf{z}_n)$$

konvergerer uavhengig av startpunkt $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0)$. Finn grenseverdien

$$\mathbf{z} = \lim_{n \to \infty} \mathbf{z}_n$$

(4 poeng)

Løsning.
Siden følgen konvergerer mot (x_0, y_0) kan vi sette $\mathbf{F}(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$, dvs.

$$\mathbf{F}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{15} \\ \frac{4}{15} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Det gir oss likningssystemet

$$\begin{aligned}\frac{1}{5}x_0 + \frac{4}{15}y_0 + 1 &= x_0 \\ \frac{4}{15}x_0 - \frac{1}{5}y_0 + 1 &= y_0\end{aligned}$$

som har løsning

$$x_0 = \frac{33}{20}, \quad y_0 = \frac{6}{5}$$

Oppgave 4

La
$$\mathbf{F}(x,y) = (2xy + y^3 + g(x), x + x^2 + 3xy^2 + h(y))$$
være et vektorfelt på $\mathbb{R}^2$, der $g(x)$ er en vilkårlig deriverbar funksjon i x og $h(y)$ en vilkårlig deriverbar funksjon i y. La $\mathcal{C}$ være den plane kurven gitt i polarkoordinater ved $r(\theta) = 2\pi\theta - \theta^2$ hvor $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Vi har $r(\theta) \geq 0$ for alle $\theta \in [0, 2\pi]$ og $r(0) = r(2\pi)$.

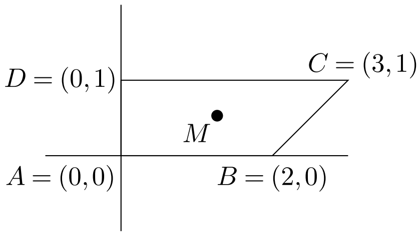
a) Vis at linjeintegralet av $\mathbf{F}$ langs med kurven $\mathcal{C}$ orientert mot venstre er
$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \tfrac{8}{15}\pi^5$$
(6 poeng)

Løsning.
Vi lar $\mathbf{F} = (P, Q)$, og får da
$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$$
hvor S er området som $\mathcal{C}$ omslutter. Dette gir
$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(x + x^2 + 3xy^2 + h(y)) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy + y^3 + g(x)) \\ &= (1 + 2x + 3y^2) - (2x + 3y^2) = 1\end{aligned}$$
mao, $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ svarer til arealet av S. Dette arealet kan vi finne ved integralet
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi\theta - \theta^2} r\, dr\, d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(2\pi\theta - \theta^2)^2\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 4\pi^2\theta^2 - 4\pi\theta^3 + \theta^4\, d\theta \\ &= [\frac{2}{3}\pi^2\theta^3 - \frac{1}{2}\pi\theta^4 + \frac{1}{10}\theta^5]_0^{2\pi} \\ &= (\frac{16}{3} - 8 + \frac{32}{10})\pi^5 = \frac{8}{15}\pi^5\end{aligned}$$

b) Et vektorfelt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er gitt som gradienten til en funksjon f, dvs. $\mathbf{F} = \nabla f$. Forklar hvordan vi kan bruke Greens teorem til å vise at integralet av $\mathbf{F}$ langs en lukket kurve som ikke skjærer seg selv er 0.(4 poeng)

Løsning.
Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved $\mathbf{F} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ og Greens teorem gir da at
$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy = 0$$

Oppgave 5 (12 poeng)



a) Et trapes $ABCD$ med hjørner $A=(0,0)$, $B=(2,0)$, $C=(3,1)$ og $D=(0,1)$ er gitt (se figur). Vis at massemiddelpunktet M til trapeset har koordinater $(\frac{19}{15},\frac{8}{15})$. (6 poeng)

Løsning.
Arealet av trapeset er $\frac{(2+3)\cdot 1}{2}=\frac{5}{2}$. En naturlig parametrisering av trapeset er $0\le x\le y+2$, $0\le y\le 1$. Det gir

$$\overline{x}=\frac{2}{5}\int_0^1\int_0^{y+2} x\,dx\,dy=\frac{2}{5}\int_0^1\frac{1}{2}(y+2)^2\,dy=\frac{2}{5}(\frac{1}{6}+1+2)=\frac{19}{15}$$

og

$$\overline{y}=\frac{2}{5}\int_0^1\int_0^{y+2} y\,dx\,dy=\frac{2}{5}\int_0^1 y(y+2)\,dy=\frac{2}{15}+\frac{2}{5}=\frac{8}{15}$$

En alternativ løsning er å dele trapeset opp i to deler, rektangelet $ABED$ hvor $E=(2,1)$. Symmetri gir at massemiddelpunktet for rektangelet er $M_1=(1,\frac{1}{2})$ og arealet er 2. Trekanten BCE har massemiddelpunkt $M_2=(\frac{7}{3},\frac{2}{3})$ og areal $\frac{1}{2}$. Det gir

$$M=\frac{2}{5}\left(2\cdot(1,\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\cdot(\frac{7}{3},\frac{2}{3})\right)=(\frac{19}{15},\frac{8}{15})$$

b) Over trapeset i oppgave a) setter vi opp et tak, dvs. en flate gitt ved funksjonen $f(x,y)=1+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y$. Finn arealet av denne flaten over trapeset. (6 poeng)

Løsning.
Vi parametriserer flaten ved

$$\mathbf{r}(x,y) = (x,y,f(x,y)) = (x,y,1+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})$$

Jacobi-matrisen til avbildningen er

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

med absoluttverdi

$$\sqrt{(-\frac{1}{4})^2 + (-\frac{1}{2})^2 + 1} = \sqrt{\frac{21}{16}} = \frac{\sqrt{21}}{4}$$

Det gir areal

$$areal = \int_0^1 \int_0^{y+2} \tfrac{\sqrt{21}}{4}\, dx\, dy = \tfrac{\sqrt{21}}{4} \int_0^1 y + 2\, dy = \tfrac{\sqrt{21}}{4}\tfrac{5}{2} = \tfrac{5\sqrt{21}}{8}$$