Prøveeksamen MAT 1110, våren 2021, versjon 1

Oppgave 1

a) La $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon som er slik at det uegentlige integralet
$$\int_2^\infty f(t)\,dt = 8$$
og betrakt rekka $\sum_{n=2}^\infty a_n$ der $a_n = f(n)$. Forklar hvorfor denne rekka konvergerer.

b) Den alternerende rekka $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{1}{n^2}$ er et eksempel på en rekke med absolutt konvergens. Forklar hva vi mener med absolutt konvergens og forskjellen på absloutt konvergens og betinget konvergens. Finn en funksjon $f(n)$ slik at rekka $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{f(n)}{n^2}$ er konvergent, men ikke absolutt konvergent.

c) Hva er konvergensradien til rekka $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{(n+1)x^n}{\beta^n}$ der β er et positivt reelt tall?

d) Vis at
$$\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(n+1)x^n}{3^n} = \frac{9}{(3+x)^2}$$
i rekkas konvergensområde.

Oppgave 2

a) Vi har gitt en funksjon $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ med at stasjonært punkt $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^2$. For å avgjøre hva slags punkt det stasjonære punktet er regner vi ut Hesse-matrisen $\mathrm{H}f(\mathbf{a})$ i det stasjonære punktet. Vi finner at det karakteristiske polynomet til Hesse-matrisen er gitt ved $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 8$. Hva slags stasjonært punkt er $\mathbf{a}$? Begrunn svaret.

b) En nivåkurve $\mathcal{C}$ for funksjonen f er parametrisert ved $\mathbf{r}(t)$, $0\le t\le 1$ og $\mathbf{r}(0)=\mathbf{r}(1)$. Vektorfunksjonen $\mathbf{r}'(t)$ gir i hvert punkt på kurven en tangent til kurven. La ∇f være gradienten til funksjonen f. Vis at i hvert punkt $\mathbf{r}(t)$ på kurven så vil gradienten $\nabla f(\mathbf{r}(t))$ stå normalt på tangenten $\mathbf{r}'(t)$.

c) La $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ være gitt ved $f(x,y)=xy+1$ over området A gitt ved
$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x^2+4y^2-8y\le 0\}$$
Finn maksimum og minimum til funksjonen f over området A.

Oppgave 3

En funksjon $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er gitt ved

$$\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+1 \\ bx+dy+1 \end{pmatrix}$$

for reelle tall a, b og c.

a) Forklar hva vi mener med at en funksjon er en kontraksjon og vis at dersom $a^2+2b^2+d^2<1$ så er $\mathbf{F}$ en kontraksjon på $\mathbb{R}^2$.

b) Finn egenverdiene λ_1, λ_2 til 2×2-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

uttrykt ved a, b og c og vis at

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = a^2 + 2b^2 + d^2$$

c) Vi skriver funksjonen $\mathbf{F}$ som

$$\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+1 \\ bx+dy+1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$. Anta at det karakteristiske polynomet til A er gitt ved

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + \tfrac{2}{9}$$

Vis at $\mathbf{F}$ er en kontraksjon på $\mathbb{R}^2$.

(Hint: Husk at det karakteristiske polynomet til en 2×2-matrise A kan skrives på formen

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1+\lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

der λ_1 og λ_2 er egenverdiene til A)

d) Forklar hvorfor det følger fra c) at

$$\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}y + 1 \\ \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}y + 1 \end{pmatrix}$$

er en kontraksjon.

e) Dette betyr at følgen

$$\mathbf{z}_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}) = \mathbf{F}(x_n, y_n) = \mathbf{F}(\mathbf{z}_n)$$

konvergerer uavhengig av startpunkt $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0)$. Finn grenseverdien

$$\mathbf{z} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{z}_n$$

Oppgave 4

a) Finn gradienten ∇f av funksjonen $f(x,y,z) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

b) Gravitasjon er beskrevet av et vektorfelt gitt ved

$$\mathbf{G}(x,y,z) = \frac{-k}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x,y,z)$$

Forklar hvorfor integralet av dette feltet mellom to gitte punkter er uavhengig av valg av veien vi følger mellom de to punktene (og hvor vi unngår origo).

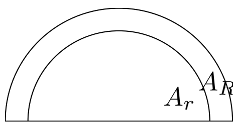
c) Hvorfor presiserer vi at vi må unngå origo?

Oppgave 5

Et område A_R i x,y-planet er gitt ved $A_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq R^2,\ x \geq 0\}$, dvs. den øvre halvparten av en sirkelskive med radius R.

a) Vis at koordinatene til massemiddelpunktet til A_R er $(\overline{x}_R, \overline{y}_R) = (0, \frac{4R}{3\pi})$.

Vi skal regne ut y-koordinaten til massemiddelpunktet til randa ∂A_R til A_R ved følgende framgangsmåte: Vi ser på to formlike områder A_R og A_r der A_r ligger inni A_R, dvs. $r < R$. (se figur).



Området mellom A_R og A_r kaller vi $B(r,R)$, dvs. $B(r,R) = A_R \setminus A_r$. Vi betrakter ∂A_R som grensen av $B(r,R)$ når $r \to R$.

Videre bruker vi formelen for massemiddelpunktet til et system av to legemer, i vårt tilfelle er gitt ved

$$\text{areal}(A_r) \cdot \overline{y}_{A_r} + \text{areal}(B(r,R)) \cdot \overline{y}_B = \text{areal}(A_R) \cdot \overline{y}_{A_R}$$

b) Benytt den skisserte framgangsmåten til å finne y-koordinaten til ∂A.

c) Over området A bygger vi et kjegleformet tak, gitt ved likningen $z = R - \sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \in A$. Finn arealet av denne flaten.