Prøveeksamen MAT 1110, våren 2021, versjon 1

Oppgave 1

a) La $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon som er slik at det uegentlige integralet

$$\int_2^\infty f(t)\,dt = 8$$

og betrakt rekka $\sum_{n=2}^\infty a_n$ der $a_n = f(n)$. Forklar hvorfor denne rekka konvergerer.

> **Løsning.**
> Integraltesten gir at rekka $\sum_{n=2}^\infty f(n)$ og det uegentlige integralet $\int_2^\infty f(t)\,dt$ begge konvergerer eller begge divergerer. Siden integralet konvergerer vil også rekka konvergere.

b) Den alternerende rekka $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{1}{n^2}$ er et eksempel på en rekke med absolutt konvergens. Forklar hva vi mener med absolutt konvergens og forskjellen på absloutt konvergens og betinget konvergens. Finn en funksjon $f(n)$ slik at rekka $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{f(n)}{n^2}$ er konvergent, men ikke absolutt konvergent.

> **Løsning.**
> Forskjellen på absolutt og betinget konvergens er at ved betinget konvergens så vil ikke rekka som betsår av absoluttverdiene av leddene i den opprinnnelige rekka konvergere. Et eksempel på en $f(n)$ som gjør rekka $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{f(n)}{n^2}$ betinget konvergent er $f(n) = n$. Den alternerende harmoniske rekka konvergerer, men ikke absolutt, siden den harmoniske rekka er divergent.

c) Hva er konvergensradien til rekka $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{(n+1)x^n}{\beta^n}$ der β er et positivt reelt tall?

> **Løsning.**
> foholdstesten gir
>
> $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{(n+2)x^{n+1}}{\beta^{n+1}}}{(-1)^n\frac{(n+1)x^n}{\beta^n}}\right| = \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{|x|}{\beta} \to \frac{|x|}{\beta}$$
>
> når $n\to\infty$. Det betyr at konvergensradien er β.

d) Vis at

$$\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(n+1)x^n}{3^n} = \frac{9}{(3+x)^2}$$

i rekkas konvergensområde.

Løsning.
Vi har

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-x}{3})^n = \frac{1}{1-(\frac{-x}{3})} = \frac{3}{3+x}$$

og derfor

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{3^n} = \frac{3x}{3+x}$$

Vi deriverer begge sider (det kakn vi gjøre innenfor konvergensområdet) og får

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)x^n}{3^n} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{3x}{3+x} = \frac{(3+x)3-3x}{(3+x)^2} = \frac{9}{(3+x)^2}$$

Oppgave 2

a) Vi har gitt en funksjon $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ med at stasjonært punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$. For å avgjøre hva slags punkt det stasjonære punktet er regner vi ut Hesse-matrisen $\mathrm{H}f(\mathbf{a})$ i det stasjonære punktet. Vi finner at det karakteristiske polynomet til Hesse-matrisen er gitt ved $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 8$. Hva slags stasjonært punkt er $\mathbf{a}$? Begrunn svaret.

Løsning.
Vi setter det karakteristiske polynomet lik 0 og finner egenverdiene 2 og -4. Det betyr at determinanten til Hessematrisen i det stasjonære punktet er -8 og $\mathbf{a}$ er et sadelpunkt.

b) En nivåkurve $\mathcal{C}$ for funksjonen f er parametrisert ved $\mathbf{r}(t)$, $0 \le t \le 1$ og $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(1)$. Vektorfunksjonen $\mathbf{r}'(t)$ gir i hvert punkt på kurven en tangent til kurven. La ∇f være gradienten til funksjonen f. Vis at i hvert punkt $\mathbf{r}(t)$ på kurven så vil gradienten $\nabla f(\mathbf{r}(t))$ stå normalt på tangenten $\mathbf{r}'(t)$.

Løsning.
Siden funksjonen er konstant langs en nivåkurve har vi at $f(\mathbf{r}(t)) = C$ for et reelt tall C. Kjerneregelen for derivasjon gir at

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t)) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

c) La $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x,y) = xy + 1$ over området A gitt ved

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + 4y^2 - 8y \le 0\}$$

Finn maksimum og minimum til funksjonen f over området A.

Løsning.
Vi bruker Lagranges multiplikatormetode på funksjonen $f(x,y) = xy+1$ relativt til bibetingelsen $g(x,y) = x^2+4y^2-8y = 0$. Det betyr at vi må løse

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

Det gir

$$y = \lambda \cdot 2x, \quad x = \lambda \cdot (8y-8), \quad x^2+4y^2-8y = 0$$

Hvis $\lambda = 0$ får vi punktet $(x,y) = (0,0)$, med funksjonsverdi $f(0,0) = 1$. Hvis $x = 0$, følger det at $y = 0$ og også at $\lambda = 0$. Så anta $x \neq 0$. Da kan vi dele med x og får $\lambda = \frac{y}{2x}$ og dermed $x = \frac{y}{2x} \cdot (8y-8)$ eller $x^2 = 4y^2-4y$. Kombinerer vi dette med $x^2+4y^2-8y = 0$ følger det at $8y^2-12y = 4y(2y-3) = 0$. Vi har allerede behandlet $y = 0$, så det som gjenstår er $y = \frac{3}{2}$, og følgelig $x = \pm\sqrt{3}$,med funksjonsverdi $f(\pm\sqrt{3}, \frac{3}{2}) = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}+1$. Siden disse verdiene er henholdsvis mindre og større enn $f(0,0) = 1$ vil de utgjøre funksjonens maksimums- og minimumsverdier.

Oppgave 3

En funksjon $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er gitt ved

$$\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+1 \\ bx+dy+1 \end{pmatrix}$$

for reelle tall a, b og c.

a) Forklar hva vi mener med at en funksjon er en kontraksjon og vis at dersom $a^2+2b^2+d^2 < 1$ så er $\mathbf{F}$ en kontraksjon på $\mathbb{R}^2$.

Løsning.
En funksjon $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er en kontraksjon dersom for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, så er $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})\| \leq C \cdot \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ for en $C < 1$.

Et kriterium for å være en kontraksjon er at for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ så er

$$\|\nabla f_1(\mathbf{x})\|^2 + \|\nabla f_2(\mathbf{y})\|^2 < C$$

Hvor $\mathbf{F} = (f_1, f_2)$. I vårt tilfelle har vi

$$\|\nabla f_1(\mathbf{x})\|^2 + \|\nabla f_2(\mathbf{y})\|^2 = a^2+b^2+b^2+d^2 = a^2+2b^2+d^2 < 1$$

så $\mathbf{F}$ er en kontraksjon.

b) Finn egenverdiene λ_1, λ_2 til 2×2-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

uttrykt ved a, b og c og vis at

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = a^2 + 2b^2 + d^2$$

Løsning.
Ved å sette ut det karakteristiske polynomet $\chi_A(\lambda) = 0$ og løse mhp λ finner vi egenverdiene

$$\lambda = \frac{a + d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2}$$

Det gir

$$\begin{aligned}
\lambda_1^2 + \lambda_2^2 &= (\frac{a + d + \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2})^2 + (\frac{a + d - \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2})^2 \\
&= 2\frac{(a+d)^2 + (a-d)^2 + 4b^2}{4} \\
&= a^2 + 2b^2 + d^2
\end{aligned}$$

c) Vi skriver funksjonen $\mathbf{F}$ som

$$\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + 1 \\ bx + dy + 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$. Anta at det karakteristiske polynomet til A er gitt ved

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + \tfrac{2}{9}$$

Vis at $\mathbf{F}$ er en kontraksjon på $\mathbb{R}^2$.

(Hint: Husk at det karakteristiske polynomet til en 2×2-matrise A kan skrives på formen

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

der λ_1 og λ_2 er egenverdiene til A)

Løsning.
Det følger fra hintet at $\lambda_1\lambda_2 = \frac{2}{9}$ og $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Det betyr at

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 2\lambda_1\lambda_2 = 1^2 - 2\cdot\frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

d) Forklar hvorfor det følger fra c) at

$$\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}y + 1 \\ \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}y + 1 \end{pmatrix}$$

er en kontraksjon.

Løsning.
Det karakteristiske polynomet til $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ er gitt ved

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})\lambda + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) = \lambda^2 - \lambda + \tfrac{2}{9}$$

som i c) er vist å svare til en kontraksjon.

e) Dette betyr at følgen

$$\mathbf{z}_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}) = \mathbf{F}(x_n, y_n) = \mathbf{F}(\mathbf{z}_n)$$

konvergerer uavhengig av startpunkt $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0)$. Finn grenseverdien

$$\mathbf{z} = \lim_{n \to \infty} \mathbf{z}_n$$

Løsning.
Vi må finne (x, y) slik at

$$\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}y + 1 \\ \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}y + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

dvs. løse likningssystemet

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}y = -1$$
$$\frac{1}{6}x - \frac{1}{2}y = -1$$

Løsningen er $x = y = 3$.

Oppgave 4

a) Finn gradienten ∇f av funksjonen $f(x, y, z) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Løsning.
Gradienten til f er

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{-kx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-ky}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-kz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

b) Gravitasjon er beskrevet av et vektorfelt gitt ved

$$\mathbf{G}(x,y,z) = \frac{-k}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x,y,z)$$

Forklar hvorfor integralet av dette feltet mellom to gitte punkter er uavhengig av valg av veien vi følger mellom de to punktene (og hvor vi unngår origo).

> **Løsning.**
> Fra forrige oppgave ser vi at
>
> $$\mathbf{G}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)$$
>
> og integralet av et gradientfelt er kun avhengig av endepunktene.

c) Hvorfor presiserer vi at vi må unngå origo?

> **Løsning.**
> Vi må unngå origo siden feltet ikke er definert der.

Oppgave 5

Et område A_R i x,y-planet er gitt ved $A_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq R^2,\ y \geq 0\}$ (Her er det rettet en trykkfeil fra opprinnelig oppgave), dvs. den øvre halvparten av en sirkelskive med radius R.

a) Vis at koordinatene til massemiddelpunktet til A_R er $(\overline{x}_R, \overline{y}_R) = (0, \frac{4R}{3\pi})$.

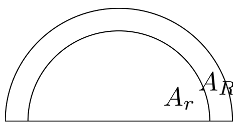
Løsning.
Siden området A_R er symmetrisk om y-aksen gir et enkelt symmetri-argument at $\overline{x} = 0$. Arealet av området er $\frac{1}{2}\pi R^2$. Vi finner $\overline{y}$ ved

$$\overline{y} = \frac{2}{\pi R^2} \iint_{A_R} y\,dx\,dy$$

Det er naturlig å skifte til polarkoordinater, med $0 \leq \theta \leq \pi$ og $0 \leq r \leq R$. Det gir

$$\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{2}{\pi R^2} \iint_{A_R} y\,dx\,dy \\
&= \frac{2}{\pi R^2} \int_0^{\pi} \int_0^{R} r \sin\theta\, r\,dr\,d\theta \\
&= \frac{2}{\pi R^2} \frac{1}{3} R^3 \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \\
&= \frac{2}{\pi R^2} \frac{1}{3} R^3 [-\cos\theta]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi R^2} \frac{1}{3} R^3 \cdot 2 = \frac{4R}{3\pi}
\end{aligned}$$

Vi skal regne ut y-koordinaten til massemiddelpunktet til randa ∂A_R til A_R ved følgende framgangsmåte: Vi ser på to formlike områder A_R og A_r der A_r ligger inni A_R, dvs. $r < R$. (se figur).



Området mellom A_R og A_r kaller vi $B(r,R)$, dvs. $B(r,R) = A_R \setminus A_r$. Vi betrakter ∂A_R som grensen av $B(r,R)$ når $r \to R$.

Videre bruker vi formelen for massemiddelpunktet til et system av to legemer, i vårt tilfelle er gitt ved

$$\text{areal}(A_r) \cdot \overline{y}_{A_r} + \text{areal}(B(r,R)) \cdot \overline{y}_B = \text{areal}(A_R) \cdot \overline{y}_{A_R}$$

b) Benytt den skisserte framgangsmåten til å finne y-koordinaten til ∂A.

Løsning.
Vi setter inn i formelen over

$$\frac{1}{2}\pi r^2 \cdot \frac{4r}{3\pi} + (\frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{1}{2}\pi r^2) \cdot \overline{y}_B = \frac{1}{2}\pi R^2 \cdot \frac{4R}{3\pi}$$

eller

$$\overline{y}_B = \frac{4(R^3 - r^3)}{3\pi(R^2 - r^2)} = \frac{4(R^2 + Rr + r^2)}{3\pi(R + r)}$$

Hvis vi lar $r \to R$ vil grenseverdien være ∂A_R, dvs.

$$\overline{y}_{\partial A_R} = \lim_{r \to R} \overline{y}_B = \lim_{r \to R} \frac{4(R^2 + Rr + r^2)}{3\pi(R + r)} = \frac{4(3R^2)}{3\pi(2R)} = \frac{2}{\pi} R$$

c) Over området A bygger vi et kjegleformet tak, gitt ved likningen $z = R - \sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \in A$. Finn arealet av denne flaten.

Løsning.
Takflaten er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(x,y) = (x, y, R - \sqrt{x^2+y^2})$$

som gir

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

og

$$\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\| = \| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 & 1 & \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{vmatrix} \|$$
$$= \| \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right) \| = \sqrt{2}$$

Vi beregner i polarkoordianter

$$\iint_{A_R} \sqrt{2}\, dx\, dy = \int_0^{\pi} \int_0^R \sqrt{2} r\, dr\, d\theta = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} R^2$$