Prøveeksamen MAT 1110, våren 2021, versjon 2

Oppgave 1

a) Anta at rekka $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n$ konvergerer for et positivt reelt tall b. Forklar hvorfor potensrekka $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergerer for alle x med $|x| \leq b$.

b) Vis at rekka $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n! \frac{x^n}{n^2}$ divergerer for alle $x \neq 0$

c) Vis at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n = \ln \left| \frac{1}{1-2x} \right|$$

i rekkas konvergensområde.

Oppgave 2

a) La A være et lukket og begrenset område i $\mathbb{R}^2$, og la $f : A \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon på A, som er deriverbar på det indre av A. Forklar ved å henvise til aktuelle resultater i pensum hvorfor funksjonen har et maksimums- og et minimumspunkt i A. Forklar, gjerne ved et moteksempel, hvorfor resultatet ikke gjelder dersom A enten er ubegrenset og/eller ikke lukket.

b) I denne oppgaven skal vi skyte spurv med kanoner: Vi har gitt en funksjon $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Bruk formalismen i Lagranges multiplikatormetode med bibetingelser, men hvor vi ikke har noen bibetingelser, til å vise at vi finner de stasjonære punktene til f ved å sette alle de partielt deriverte lik 0.

c) Et plan i $\mathbb{R}^4$ er gitt ved $5x - y + 3z - w = 6$. Bruk Lagranges multiplikatormetode til å finne den minste verdien av funksjonen $f(x,y,z,w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ over A.

Oppgave 3

a) En **ortonormal basis** for et $\mathbb{R}^3$ er en basis der elementene står normalt på hverandre og har lengde 1.

La $\mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ være en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$. En vektor $\mathbf{u}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av basisvektorene i $\mathcal{B}$;

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + c_3\mathbf{w}_3$$

Forklar hvordan vi kan utnytte at basisen $\mathcal{B}$ er ortonormal til å finne c_1, c_2 og c_3 uttrykt ved $\mathbf{u}$ og basisielementene i $\mathcal{B}$.

b) Uten å behøve å regne noen ting kan vi fastslå at 3×3-matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

har en ortonormal basis av egenvektorer. Forklar hvorfor ved å henvise til et passende resultat i læreboka.

c) La A være en 3×3-matrise hvor søylene er de tre basisvektorene i $\mathcal{B}$ i oppgave a). Hva kan vi si om $A^T A$? Begrunn svaret.

Oppgave 4

La $\mathbf{F}(x,y) = (y + 4xy + y^4 + x^4, 2x^2 + 4xy^3 + y^5)$ være et vektorfelt på $\mathbb{R}^2$. La $\mathcal{C}$ være den plane kurven gitt i polarkoordinater ved $r(\theta) = \sqrt{\pi\theta - \theta^2}$ hvor $0 \le \theta \le \pi$.

a) Vis at $\mathcal{C}$ er en lukket kurve som ikke skjærer seg selv.

b) Vis at linjeintegralet av $\mathbf{F}$ langs med kurven $\mathcal{C}$ orientert mot venstre er

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\tfrac{1}{12}\pi^3$$

Oppgave 5

En god måte å parametrisere området E avgrenset av ellipsen gitt ved

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$$

er ved elliptiske polarkoordinater"$x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$, hvor $0 \le \theta \le 2\pi$ og $0 \le r \le 1$.

a) Bruk denne parametriseringen til å beregne arealet av ellipsen. Vis utregningen.

b) Greens teorem sier at for et vektorfelt $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ så har vi

$$\oint_{\partial E} P\,dx + Q\,dy = \iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

La nå vektorfeltet være gitt ved $\mathbf{F}(x,y) = (y,x)$. Regn ut begge sider av Greens formel i dette tilfellet og vis at venstresiden er lik høyresiden.

Oppgave 6

La

$$\mathbf{G}(x,y) = \left(\frac{1}{2}(x+y), \frac{1}{4}(x^2+y^2)\right)$$

være en funksjon definert over disken $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le 1\}$. Vis at funksjonen er en kontraksjon på $\mathcal{D}$.