Prøveeksamen MAT 1110, våren 2021, versjon 2

Oppgave 1

a) Anta at rekka $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n$ konvergerer absolutt for et positivt reelt tall b. Forklar hvorfor potensrekka $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergerer for alle x med $|x| \le b$.

Løsning.
Vi har at
$$|a_n x^n| = |a_n| \cdot |x|^n \le |a_n| b^n = M_n$$
Men siden rekka $\sum a_n b^n$ konvergerer absolutt, så vil rekka $\sum M_n$ konvergere og ved Weierstrass M-test vil også rekka $\sum a_n x^n$ konvergere.

Retteveiledning:
2 poeng for å sammenlikne med en konvergent tallrekke, 2 poeng for å bruke Weierstrass M-test. Totalt 4 poeng.

b) Vis at rekka $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n! \frac{x^n}{n^2}$ divergerer for alle $x \neq 0$

Løsning.
Forholdstesten gir
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!x^{n+1}}{(n+1)^2} \frac{n^2}{(-1)^n n! x^n}\right| = \frac{n^2}{n+1}|x| \to \infty$$
når $n \to \infty$, bortsatt fra hvis $x = 0$.

Retteveiledning:
1 poeng for å referere til forholdstesten, 1 poeng for å sette opp rett uttrykk og 1 poeng for å gi rett grenseverdi. De siste 2 poengene for å konkluderer rett, dvs. gi rett konvergensradius. Totalt 5 poeng.

c) Vis at
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n = \ln\left|\frac{1}{1-2x}\right|$$
i rekkas konvergensområde.

Løsning.
Vi deriverer begge sider og får

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n-1} = \frac{2}{1-2x}$$

Deler vi med 2 på begge sider får vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2x)^{n-1} = \frac{1}{1-2x}$$

som vi ser stemmer med summen av en geometrisk rekke. Vi kan dermed komme fram til likningen ved å gjøre operasjonene i motsatt rekkeføge. Det vil gi oss en integrasjonskonstant, men setter vi inn $x=0$ i likningenser vi at formelen stemmer; begge sider blir lik 0.

Retteveiledning:
Dersom framgangsmetoden er rett kan det gis inntil 3 poeng, selv om det er feil i utregningene. Totalt 6 poeng.

Oppgave 2

a) La A være et lukket og begrenset område i $\mathbb{R}^2$, og la $f : A \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon på A, som er deriverbar på det indre av A. Forklar ved å henvise til aktuelle resultater i pensum hvorfor funksjonen har et maksimums- og et minimumspunkt i A. Forklar, gjerne ved et moteksempel, hvorfor resultatet ikke gjelder dersom A enten er ubegrenset og/eller ikke lukket.

Løsning.
I følge ekstramalverdisetningen vil en kontinuerlig funksjon på et lukket og begrenset område oppnå sitt maksimum og sitt minimum i området.

Et moteksempel kan være funksjonen $f(x,y) = x$ over hele $\mathbb{R}^2$. $\mathbb{R}^2$ er ikke begrenset og funksjonen har ikke noen maksimums- eller minimumspunkter.

Retteveiledning:
2 poeng for å henvise til ekstramalverdiesetningen på rett måte, 2 poeng for et korrekt eksempel. Totalt 4 poeng.

b) I denne oppgaven skal vi skyte spurv med kanoner: Vi har gitt en funksjon $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Bruk formalismen i Lagranges multiplikatormetode med bibetingelser, men hvor vi ikke har noen bibetingelser, til å vise at vi finner de stasjonære punktene til f ved å sette alle de partielt deriverte lik 0.

Løsning.
Vi har ingen bibetingelse, dvs. at vi kan anta at $g(x_1,\ldots,x_m)$ er identisk lik 0. Det betyr at $g(x_1,\ldots,x_m) = 0$ er trivielt oppfylt overalt. Dermed får vi også at $\nabla g = 0$, og Lagrange gir dermed

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda \cdot 0 = 0$$

som er det samme som at alle partielt deriverte til f i $\mathbf{a}$ er 0.

Retteveiledning:
2 poeng for å sett opp Lagrang med rett bibetingelse. 2 poeng for å trekke rett konklusjon. Totalt 4 poeng.

c) Et legeme i $\mathbb{R}^4$ er gitt ved $5x - y + 3z - w = 6$. Bruk Lagranges multiplikatormetode til å finne den minste verdien av funksjonen $f(x,y,z,w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ over A.

Løsning.
Her skal vi minimere funksjonen $f(x,y,z,w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ gitt betingelsen $g(x,y,z,w) = 5x - y + 3z - w - 6 = 0$. Vi regner ut gradientene og får

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda \cdot 5 \\ 2y &= \lambda \cdot (-1) \\ 2z &= \lambda \cdot 3 \\ 2w &= \lambda \cdot (-1) \\ 5x - y + 3z - w &= 6 \end{aligned}$$

Eliminerer vi λ fra de fire øverste likningene får vi $x = -5y$, $z = -3y$ og $w = y$. Setter vi dette inn i den siste likningen får vi

$$-25y - y - 9y - y = -36y = 6$$

dvs. $y = -\frac{1}{6}$, noe som gir oss løsningen

$$(x,y,z,w) = (\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{3}{6}, -\frac{1}{6})$$

og funksjonsverdien blir

$$f(\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{3}{6}, -\frac{1}{6}) = 1$$

Siden funksjonen kan anta vilkårlig store verdier (sett f.eks. $x = z = 0$ og $w = -6 - y$, noe som gir $f(0,y,0,-6-y) = y^2 + (y+6)^2$ for fritt valgt y) vil dette være et minimumspunkt.

Retteveiledning:
1 poeng for å stille opp Lagrange, og 1 poeng til for å regne ut riktige gradienter. 3 poeng for å løse likningssytemet. Det siste poenget for å begrunne hvorfor punktet er et minimumspunkt. Totalt 6 poeng.

Oppgave 3

a) En **ortonormal basis** for et $\mathbb{R}^3$ er en basis der elementene står normalt på hverandre og har lengde 1.

La $\mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ være en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$. En vektor $\mathbf{u}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av basisvektorene i $\mathcal{B}$;

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + c_3\mathbf{w}_3$$

Forklar hvordan vi kan utnytte at basisen $\mathcal{B}$ er ortonormal til å finne c_1, c_2 og c_3 uttrykt ved $\mathbf{u}$ og basisielementene i $\mathcal{B}$.

Løsning.
Siden basisen er ortonormal så vil

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}_i = c_1\mathbf{w}_1\cdot\mathbf{w}_i + c_2\mathbf{w}_2\cdot\mathbf{w}_i + c_3\mathbf{w}_3\cdot\mathbf{w}_i = 0 + c_i\cdot 1 + 0 = c_i$$

Retteveiledning:
Her kan det gis inntil 2 poeng for å oversette definisjonen av ortonormal basis til matematisk terminologi med skalarprodukt. 1 poeng for å gi formelen $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}_i = c_i$, 2 poeng for begrunnelsen. Totalt 5 poeng.

b) Uten å behøve å regne noen ting kan vi fastslå at 3×3-matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

har en ortonormal basis av egenvektorer. Forklar hvorfor ved å henvise til et passende resultat i læreboka.

Løsning.
Matrisen er symmetrisk og da sier spektralteoremet for symmetriske matriser at egenverdiene er reelle og at det finnes en ortonomrmal basis av egenvektorer.

Retteveiledning:
3 poeng for å henvise til spektralteoremet. Totalt 3 poeng.

c) La A være en 3×3-matrise hvor søylene er de tre basisvektorene i $\mathcal{B}$ i oppgave a). Hva kan vi si om A^TA? Begrunn svaret.

Løsning.
Elementet i A^TA på plass (i,j) er gitt ved skalarproduktet $\mathbf{w}_i\cdot\mathbf{w}_j$. Det betyr at diagonalelementene i A^TA, gitt ved $\mathbf{w}_i\cdot\mathbf{w}_=1$, mens alle andre elementer er 0. Mao Er A^TA identitetsmatrisen.

Retteveiledning:
1 poeng for å vite hva A^T er og 1 poeng for å angi hva produktet skal være. 2 poeng for å svare at dette er identitetsmatrisen. Totalt 4 poeng.

Oppgave 4

La $\mathbf{F}(x,y) = (y+4xy+y^4+x^4, 2x^2+4xy^3+y^5)$ være et vektorfelt på $\mathbb{R}^2$. La $\mathcal{C}$ være den plane kurven gitt i polarkoordinater ved $r(\theta) = \sqrt{\pi\theta - \theta^2}$ hvor $0 \leq \theta \leq \pi$.

a) Vis at $\mathcal{C}$ er en lukket kurve som ikke skjærer seg selv.

Løsning.
Rettelse: Her skulle vi ha introdusert en parametrisering av kurven; $\mathbf{s}(\theta, r(\theta))$. Dersom kurven skal skjære seg selv, må dette skje i origo siden den eneste muligheten for at $\mathbf{s}(\theta_1, r(\theta_1)) = \mathbf{s}(\theta_2, r(\theta_2))$ når $\theta_1 \neq \theta_2$ er at $r(\theta_1) = r(\theta_2) = 0$. Men $r(\theta) = 0$ gir $\theta = 0$ eller $\theta = \pi$, som er de to endepunktene i intervallet. Dvs. at kurven er lukket og den skjærer ikke seg selv mellom endepunktene.

Retteveiledning:
2 poeng for å vise at kurven er lukket. 3 poeng for å forklare hvorfor den ikke skjærer seg selv. Totalt 5 poeng.

b) Vis at linjeintegralet av $\mathbf{F}$ langs med kurven $\mathcal{C}$ orientert mot venstre er

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\tfrac{1}{12}\pi^3$$

Løsning.
Vi skal bruke Greens teorem og ser at dersom vi setter $\mathbf{F}(x,y) = (y+4xy+y^4+x^4, 2x^2+4xy^3+y^5) = (P(x,y), Q(x,y))$, så får vi

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = (4x+4y^3) - (1-4x+4y^3) = -1$$

Det gir

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi} \int_0^{\sqrt{\pi\theta-\theta^2}} (-1) r \, dr \, d\theta \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left[r^2 \right]_0^{\sqrt{\pi\theta-\theta^2}} d\theta \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \pi\theta - \theta^2 \, d\theta \\
&= -\frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2}\theta^2 - \frac{1}{3}\theta^3 \right]_0^{\pi} \\
&= -\tfrac{1}{12}\pi^3
\end{aligned}$$

Retteveiledning:
1 poeng for å bringe Greens teorem på banen, og 1 poeng for å vise at kurveintegralet blir det samme som (-) arealet. 2-4 poeng for helt eller delvis løsning av integralet. Totalt 6 poeng.

Oppgave 5

En god måte å parametrisere området E avgrenset av ellipsen gitt ved

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

er ved elliptiske polarkoordinater $x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$, hvor $0 \leq \theta \leq 2\pi$ og $0 \leq r \leq 1$.

a) Bruk denne parametriseringen til å beregne arealet av ellipsen. Vis utregningen.

Løsning.
Jacobien til elliptiske polarkoordinater er gitt ved

$$J = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr$$

Arealet av ellipsen er dermed gitt ved

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 abr\,dr\,d\theta = \frac{1}{2} \cdot 2\pi ab = \pi ab$$

Retteveiledning:
2 poeng for å beregne Jacobien. 1 poeng for å sette opp rett integral, 3 poeng for rett svar. Totalt 6 poeng.

b) Greens teorem sier at for et vektorfelt $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ så har vi

$$\oint_{\partial E} P\,dx + Q\,dy = \iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

La nå vektorfeltet være gitt ved $\mathbf{F}(x,y) = (y,x)$. Regn ut begge sider av Greens formel i dette tilfellet og vis at venstresiden er lik høyresiden.

Løsning.
Vi har for venstresiden (husk at på ellipsen er $r = 1$):

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial E} P\,dx + Q\,dy &= \oint_{\partial E} y\,dx + x\,dy \\
&= \int_0^{2\pi} (b\sin\theta(-a\cos\theta) + a\cos\theta \cdot b\sin\theta)\,d\theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

og høyresiden:

$$\iint_E (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,dx\,dy = \iint_E (\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y})\,dx\,dy = 0$$

Retteveiledning:
3 poeng for hver side av integraluttrykket. Totalt 6 poeng.

Oppgave 6

6La

$$\mathbf{G}(x,y) = \left(\frac{1}{2}(x+y), \frac{1}{4}(x^2+y^2)\right)$$

være en funksjon definert over disken $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1\}$. Vis at funksjonen er en kontraksjon på $\mathcal{D}$.

Løsning.
Vi bruker gradient-kriteriet for at en funksjon er en kontraksjon (vi setter $\mathbf{G} = (g_1, g_2)$):

$$\begin{aligned}
\nabla g_1(\mathbf{p}) &= (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\
\nabla g_2(\mathbf{q}) &= (\frac{q_1}{2}, \frac{q_2}{2})
\end{aligned}$$

hvor $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathcal{D}$. Dette gir

$$\begin{aligned}
\|\nabla g_1(\mathbf{p})\|^2 + \|\nabla g_2(\mathbf{q})\|^2 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{q_1^2}{4} + \frac{q_2^2}{4} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{q_1^2+q_2^2}{4} \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1
\end{aligned}$$

og kriteriet er oppfylt.

Retteveiledning:
1 poeng for å vite hva en kontraksjon er og 2 poeng for å gi rett kriterium for at en funksjon er en kontraksjon. 3 poeng for rett anvendelse av kriteriet, dvs. vise at kvadratsummen blir mindre enn 1. Totalt 6 poeng.