UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1110 — Kalkulus og lineær algebra
Eksamensdag:	Onsdag 1. Juni 2022
Tid for eksamen:	9:00 – 13:00.

Oppgavesettet er på 5 sider.

Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle deloppgaver (1a, 1b, 2a, 2b, 2c, osv.) teller 10 poeng. Du må enten begrunne svarene eller vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1. La A være 2×2-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 \end{pmatrix}$$

a) Finn egenverdiene til A og tilhørende egenvektorer.

Løsning.
Vi finner egenverdiene ved å løse likningen

$$\begin{vmatrix} 0.3-\lambda & 0.6 \\ 0.7 & 0.4-\lambda \end{vmatrix} = (0.3-\lambda)(0.4-\lambda) - 0.6 \cdot 0.7 = \lambda^2 - 0.7\lambda - 0.3 = 0$$

Det gir egenverdiene $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = -0.3$.

For $\lambda_1 = 1$ løser vi

$$\begin{pmatrix} -0.7 & 0.6 \\ 0.7 & -0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

og får egenvektor

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(Fortsettes på side 2.)

For $\lambda_2 = -0.3$ løser vi

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.6 \\ 0.7 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

som gir egenvektorer

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) La $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Skriv $\mathbf{v}$ som en lineærkombinasjon av egenvektorene fra oppgave a), og regn ut grenseverdien

$$\lim_{n\to\infty} A^n \mathbf{v}$$

Løsning.
Vi løser likningssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Det gir $t = \frac{2}{13}$, $u = \frac{1}{13}$. Videre har vi

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \lim_{n\to\infty} A^n \left(\frac{2}{13} \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{13} 1^n \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{1}{13} (-0.3)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{2}{13} \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Oppgave 2. La funksjonen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x, y) = 2xy^2 + 4xy - x^2 + 1$$

a) Finn de stasjonære punktene til f.

Løsning.
Vi har

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2 + 4y - 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4xy + 4x$$

Setter vi begge disse lik 0 får vi 3 muligheter for stasjonære punkter (x, y); $(0, 0)$, $(0, -2)$ og $(-1, -1)$.

b) Avgjør om de stasjonære punktene er sadelpunkter, lokale minimumspunkter eller lokale maksimumspunkter.

(Fortsettes på side 3.)

Løsning.
Vi har
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4y + 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x$$
Hesse-matrisen i dette tilfellet er derfor gitt ved
$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 4y+4 \\ 4y+4 & 4x \end{pmatrix}$$
Det gir
$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad Hf(0,-2) = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix},$$
$$Hf(-1,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$
Determinantene er henholdsvis -16, -16 og 8. I det siste tilfellet er $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = -2$. Det betyr at de to første punktene er sadelpunkter, mens det siste er et lokalt maksimum.

c) Finn den minste verdien til funksjonen f under bibetingelsen
$$x - y^2 - 2y = 0$$

Løsning.
Vi lar $g(x,y) = x - y^2 - 2y$. Det gir $\frac{\partial g}{\partial x} = 1$ og $\frac{\partial g}{\partial y} = -2y - 2$. Ved Lagranges metode må vi finne løsningen av likningssettet
$$\begin{aligned} 2y^2 + 4y - 2x &= \lambda \cdot 1 \\ 4xy + 4x &= \lambda \cdot (-2y - 2) \\ x - y^2 - 2y &= 0 \end{aligned}$$
Hvis $y = -1$ får vi $-2 - 2x = \lambda$, $0 = \lambda \cdot 0$ og $x + 1 = 0$. Dette gir punktet $(-1,-1)$ med funksjonsverdi $f(-1,-1) = 2$.
Hvis $y \neq -1$ kan vi forkorte den andre likningen med $y + 1$ og siden $2y^2 + 4y - 2x = -2(x - y^2 - 2y) = 0$ reduseres likningssystemet til
$$\begin{aligned} 0 &= \lambda \\ 4x &= -2\lambda \\ x - y^2 - 2y &= 0 \end{aligned}$$
som betyr at $x = 0$ og $y = 0$ eller $y = -2$. Innsetting vir
$$f(0,0) = 1, \quad f(0,-2) = 1$$
som betyr at 1 er den minste verdien på kurven $x - y^2 - 2y = 0$.

Oppgave 3.

a) Forklar hvorfor rekka $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}$ konvergerer.

(Fortsettes på side 4.)

Løsning.
Ved forholdstesten har vi

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)2^n}{(n+2)2^{n+1}} = \frac{n+1}{2(n+2)} \to \frac{1}{2} < 1$$

når $n \to \infty$.

b) Finn konvergensområdet til rekka $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$

Løsning.
Ved forholdstesten har vi

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{(n+2)x^n}\right| = \frac{n+1}{n+2}|x| \to |x|$$

når $n \to \infty$. Det betyr at vi har konvergens på det åpne intervallet $(-1, 1)$. I endepunktet $x = 1$ får vi den harmoniske rekka som divergerer, mens i endepunktet $x = -1$ får vi den konvergente alternerende harmomiske rekka. Konvergensområdet blir derfor det halvåpne intervallet $[-1, 1)$.

c) Finn summen av rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

og bruk dette til å vise at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n} = 2 \ln 2$$

Løsning.
La

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

Da har vi

$$xf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \Rightarrow (xf(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

i konvergensområdet. Det gir

$$xf(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt = -\ln(1-x)$$

og

$$f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

(Fortsettes på side 5.)

Setter vi inn $x = \frac{1}{2}$ får vi

$$f(\frac{1}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n} = -\frac{\ln(1-\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}} = 2\ln 2$$

Oppgave 4. Et område A i (x, y)-planet er avgrenset av de to parablene $y = x^2 - 1$ og $y = 1 - x^2$.

a) Finn arealet av A.

Løsning.
De to parablene skjærer hverandre i $x = \pm 1$. Arealet er derfor gitt ved

$$\begin{aligned} a(A) &= \int_{-1}^{1} \int_{x^2-1}^{1-x^2} 1\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2) - (x^2-1)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} 2 - 2x^2\,dx = [2x - \frac{2}{3}x^3]_{-1}^{1} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

b) Et vektorfelt $\mathbf{F}$ er definert over området A ved

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^3 - y + x)\mathbf{i} + (2x + y^2 + 3xy^2)\mathbf{j}$$

Finn linjeintegralet av $\mathbf{F}$ langs randa ∂A til området A, orientert mot klokka.

Løsning.
La $\mathbf{F}(x, y) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$. da har vi

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = (2 + 3y^2) - (3y^2 - 1) = 3$$

Ved Greens teorem har vi

$$\oint_{\partial A} P\,dx + Q\,dy = \iint_A \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \iint_A 3\,dx\,dy = 3 \cdot a(A) = 8$$

SLUTT.