Prøveeksamen, MAT 1110, mars 2022

Oppgave 1 (Elementære matriser)
Hvilket av alternativene uttrykker den inverse til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

som et produkt av <u>elementære</u> matriser:

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Oppgave 2 (Egenverdier)
Egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

er gitt ved

a) $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 3$

b) $\lambda = 1$ med multiplisitet 2

c) $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 2$

d) $\lambda = 2$ med multiplisitet 2

e) $\lambda = -1 \pm 3i$

Oppgave 3 (Egenvektorer)
Hvilken av følgende påstander om egenverdiene/egenvektorene til en matrise er <u>ikke</u> riktig?

a) Hvis $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er egenvektorer med samme egenverdi, så er også $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ en egenvektor

b) Egenverdiene til en matrise er røtter i matrisens karakteristiske polynom

c) En symmetrisk matrise har en basis av egenvektorer

d) Egenvektorer for forskjellige egenverdier er lineært uavhengige

e) Hvis λ_1 og λ_2 er forskjellige egenverdier, så er også $\lambda_1 + \lambda_2$ en egenverdi

Oppgave 4 (Karakteristisk polynom)
Det karakteristiske polynomet til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

er gitt ved

a) $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 2)$

b) $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2$

c) $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 2$

d) $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$

e) $\chi_A(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda + 2)$

Oppgave 5 (Teorispørsmål om løsning av likningssystemer)
La A være 3×3-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hvilken av følgende påstander er <u>sann</u>?

a) Determinanten til A er 0.

b) Likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har uendelig mange løsninger for alle valg av $\mathbf{b}$.

c) Den reduserte trappeformen til A har kun en pivotsøyle.

d) Likningen $A\mathbf{x} = 0$ har kun løsningen $\mathbf{x} = 0$.

e) Den reduserte trappeformen til A har ingen pivotsøyle.

Oppgave 6 (Determinanter)
Hvilken av følgende påstander om determinanten til en kvadratisk $n \times n$-matrise A er ikke riktig:

a) Dersom A er øvre triangulær så er determinanten til matrisen lik produktet av elementene på diagonalen

b) Hvis A har en hel rad av 0-er, så er determinanten til A lik 0

c) Hvis A er en $2n \times 2n$-matrise så vil ombytting av to rader ikke endre fortegnet til determinanten

d) Hvis n er et oddetall, så er $\det(-A) = -\det(A)$

e) $\det(M^{-1}AM) = \det(A)$ hvor M er en inverterbar $n \times n$-matrise

Oppgave 7 (Kjeglesnitt)
Hva slags kjeglesnitt får vi som løsningen på ligningen

$$-x^2 + 2x - 4y^2 + 16y - 13 = 0$$

a) En hyperbel med sentrum i $(1, 2)$ og med asymptoter $y - 2 = \pm 2(x - 1)$

b) En hyperbel med sentrum i $(2, 1)$ og med asymptoter $y - 1 = \pm 2(x - 2)$

c) En ellipse med sentrum i $(1, 2)$ og halvakser $a = 2$ og $b = 1$

d) En ellipse med sentrum i $(2, 1)$ og halvakser $a = 2$ og $b = 1$

e) En parabel med brennpunkt i $(1, 1)$ og styrelinje $y = -1$

Oppgave 8 (Tangentplan)
Tangentplanet til flaten

$$f(x, y, z) = x^2 + xy + yz + 2$$

i punktet $(1, -1, 2)$ har likning

a) $x + 3y - z = -4$

b) $x - 3y - z = 2$

c) $x - 3y + z = 6$

d) $x + 3y + z = 0$

e) $x + 3y - z = 4$

Oppgave 9 (Buelengde)
Buelengden B til kurven

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{3}t\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{6}t^2\,\mathbf{j} + \frac{1}{9}t^3\,\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$$

er gitt ved

a) $B = \frac{2}{9}$

b) $B = \frac{1}{3}$

c) $B = \frac{4}{9}$

d) $B = \frac{5}{9}$

e) $B = \frac{2}{3}$

Oppgave 10 (Potensialfunksjon)
En potensialfunksjon ϕ til vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + (x + z^2)\,\mathbf{j} + 2yz\,\mathbf{k}$$

er gitt ved

a) $\phi(x, y, z) = xy + yz^2 + 4$

b) $\phi(x, y, z) = xy + 2yz + 1$

c) $\phi(x, y, z) = xyz + xyz^2 + 2$

d) $\phi(x, y, z) = xy + yz^2 + x^2 + 3$

e) $\phi(x, y, z) = xy + yz$

Oppgave 11 (Linjeintegralet for skalarfelt)
Regn ut linjeintegralet

$$L = \int_{\mathcal{C}} f \, ds$$

når $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{5}}(xy - x^2)$ og $\mathcal{C}$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}, \quad t \in [0, 3]$$

a) $L = 9$

b) $L = 12$

c) $L = 15$

d) $L = 18$

e) $L = 21$

Oppgave 12 (Linearisering av vektorfelt)
Regn ut linjeintegralet

$$L = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

når $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} - xy\,\mathbf{j}$ og kurven $\mathcal{C}$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}, \quad t \in [0, 2]$$

a) $L = -8$

c) $L = -6$

e) $L = 0$

d) $L = 6$

b) $L = 8$

Oppgave 13 (Integral av konservativt felt)
La $\mathcal{C}$ være den parametriserte kurven $\mathbf{r}(\theta) = \mathbf{2}\cos\theta\,\mathbf{i} + \mathbf{2}\sin\theta\,\mathbf{j}$, hvor $\theta \in [0, 2\pi]$. Regn ut integralet

$$\int_{\mathcal{C}} (x + 2y + \sin x \cos x)\,\mathrm{d}x + (2x + y + e^{2y})\,\mathrm{d}y$$

a) -2

b) -1

c) 0

d) 1

e) 2

Oppgave 14 (Dobbeltintegraler)
Vi har gitt et dobbeltintegral

$$A = \iint_Q (6xy^2 + 4x\cos y)\,dx\,dy$$

der $Q = [0,1] \times [0,\pi]$. Hva er verdien av A?

a) $A = \pi$

b) $A = \pi^2$

c) $A = \pi^3$

d) $A = \pi + \pi^2$

e) $A = \pi^2 + \pi^3$

Oppgave 15 (Tyngdepunkt for et område i planet)
Et område A i (x, y)-planet er gitt ved $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1 - x^2$. Da er massemiddelpunktet til A gitt ved

a) $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, \frac{2}{5})$

b) $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, \frac{3}{5})$

c) $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, \frac{1}{2})$

d) $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, \frac{1}{3})$

e) $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, \frac{2}{3})$

SLUTT.