MAT 1110, 21. januar 2022

∗ Kjerneregelen i flere variable
∗ Linearisering av funksjoner

Arne B. Sletsjøe
Universitetet i Oslo

b) Repeter kjerneregelen for funksjoner i en variabel og bruk denne til å derivere funksjonen $f(t) = \sin(\omega t)$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad f'(t) = \cos(\omega t) \cdot \omega$$

c) Finn funksjonsverdien $f(\frac{\pi}{\omega})$ og verdien av den deriverte av funksjonen $f(t)$ i punktet $t = \frac{\pi}{\omega}$.

$$f(\tfrac{\pi}{\omega}) = \sin(\pi) = 0 \qquad f'(\tfrac{\pi}{\omega}) = (-1) \cdot \omega = -\omega$$

d) Bruk ett-punkts-formelen til å finne likningen for linja gjennom punktet $P = (\frac{\pi}{\omega}, f(\frac{\pi}{\omega}))$ med stigningstall $f'(\frac{\pi}{\omega})$. Vi har nå funnet lineariseringen av funksjonen $f(t)$ i P.

$$y - f(\tfrac{\pi}{\omega}) = f'(\tfrac{\pi}{\omega})(x - \tfrac{\pi}{\omega}) \qquad \Rightarrow \qquad y = -\omega(x - \tfrac{\pi}{\omega}) = -\omega x + \pi$$

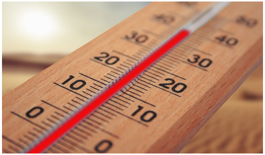
"If a car travels twice as fast as a bicycle and the bicycle is four times as fast as a walking man, then the car travels $2 \times 4 = 8$ times as fast as the man."

George F. Simmons



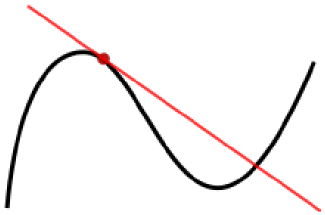
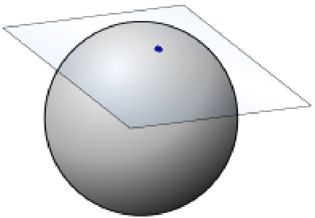


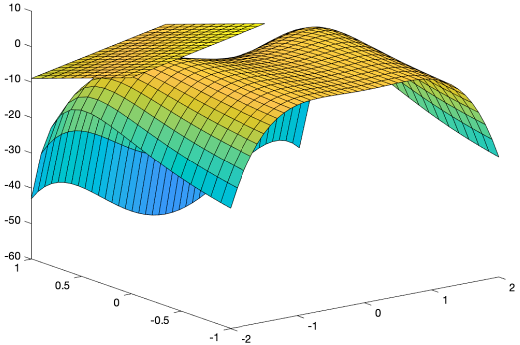

100
HUNDRE KRONER
SPECIMEN
100
NORGES BANK



0
10
20
30
40

AISI 316
bar
psi
EN 837-1
acc.0,6
HAAKON ELLINGSEN



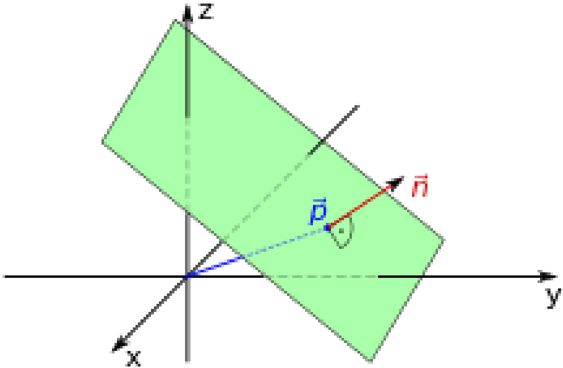
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
1
0.5
0
-0.5
-1
-2
-1
0
1
2

Hva skal vi med lineariseringen av en funksjon i et punkt?

- Veldig likt med funksjonen i en liten omegn om punktet
- Mye lettere å forholde seg til og regne på.

Lineariseringen danner tangentrommet til grafen til funksjonen i punktet.

Hva er lineariseringen til et plan?


z
y
x
$\vec{p}$
$\vec{n}$

Utbyttet til bonden er gitt ved

$$U = F(a, k, m)$$

hvor $a = A(t)$ er arbeidsinnsats, $k = K(t)$ er kapitalinvestering og $m = M(t)$ er dyrket mark. Alle tre innsatsfaktorer er tidsahengige.

Det gir

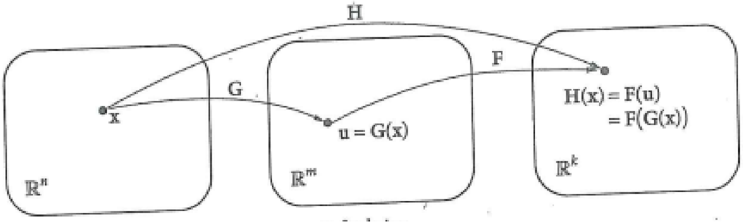
$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial a} A'(t) + \frac{\partial F}{\partial k} K'(t) + \frac{\partial F}{\partial m} M'(t)$$

P: trykk, V: volum, T: temperatur

$$P = f(T, V) = f(T, V(T))$$

Hva skjer når vi tar med ballongen inn fra kulda til et varmt rom, dvs. vi endrer temperaturen?

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\partial f}{\partial T} \cdot \frac{dT}{dT} + \frac{\partial f}{\partial V} \cdot \frac{dV}{dT} = \frac{\partial f}{\partial T} + \frac{\partial f}{\partial V} \cdot \frac{dV}{dT}$$


H
F
G
x
u = G(x)
H(x) = F(u)
= F(G(x))
ℝⁿ
ℝᵐ
ℝᵏ

Notasjon:

For en funksjon $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gitt ved

$$\mathbf{F}(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

skriver vi

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

hvor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Denne matrisen kalles **Jacobi-matrisen**, oppkalt etter Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851).

TEOREM 2.7.5

Kjerneregelen på matriseform

Anta at vi har to mengder $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ og to funksjoner $\mathbf{G} : A \to B$, $\mathbf{F} : B \to \mathbb{R}^k$. Dersom $\mathbf{G}$ er deriverbar i punktet $\mathbf{a} \in A$, og $\mathbf{F}$ er deriverbar i punktet $\mathbf{b} = \mathbf{G}(\mathbf{a})$, så er den sammensatte funksjonen $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}\big(\mathbf{G}(\mathbf{x})\big)$ deriverbar i $\mathbf{a}$, og Jacobi-matrisen til $\mathbf{H}$ er gitt ved

$$\mathbf{H}'(\mathbf{a}) = \mathbf{F}'\big(\mathbf{G}(\mathbf{a})\big)\mathbf{G}'(\mathbf{a})$$

Et forenklet argument:

Betrakt sammensetningen

$$h(t) = g(f(t))$$

Vi bruker approksimasjonen $\Delta f \approx f(t + \Delta t) - f(t)$ eller $f(t + \Delta t) \approx f(t) + \Delta f$, og

$$f'(t) \approx \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

Det gir

$$\begin{aligned} h'(t) \approx \frac{\Delta h}{\Delta t} &\approx \frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{g(f(t+\Delta t))-g(f(t))}{\Delta t} \\ &\approx \frac{g(f(t)+\Delta f)-g(f(t))}{\Delta t} \\ &\approx \frac{g(f(t)+\Delta f)-g(f(t))}{\Delta f} \cdot \frac{\Delta f}{\Delta t} \\ &\approx g'(f(t)) \cdot f'(t) \end{aligned}$$

TEOREM 2.7.6

Kjerneregelen på komponentform

Anta at vi har to mengder $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ og to funksjoner $\mathbf{G} : A \to B$, $\mathbf{F} : B \to \mathbb{R}^k$. Dersom $\mathbf{G}$ er deriverbar i punktet $\mathbf{a} \in A$ og $\mathbf{F}$ er deriverbar i punktet $\mathbf{b} = \mathbf{G}(\mathbf{a})$, så er den sammensatte funksjonen $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}\big(\mathbf{G}(\mathbf{x})\big)$ deriverbar i $\mathbf{a}$, og de partiellderiverte til $\mathbf{H}$ er gitt ved

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) &= \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial u_p}(\mathbf{G}(\mathbf{a}))\frac{\partial G_p}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \\ &= \frac{\partial F_i}{\partial u_1}(\mathbf{G}(\mathbf{a}))\frac{\partial G_1}{\partial x_j}(\mathbf{a}) + \frac{\partial F_i}{\partial u_2}(\mathbf{G}(\mathbf{a}))\frac{\partial G_2}{\partial x_j}(\mathbf{a}) + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial u_m}(\mathbf{G}(\mathbf{a}))\frac{\partial G_m}{\partial x_j}(\mathbf{a})\end{aligned}$$

Eksempel:

Betrakt funksjonen

$$f(u_1, u_2) = u_1 u_2^2$$

og funksjonene

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 \qquad g_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3$$

Vi lar

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = f(u_1, u_2) = f(g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}))$$

og oppgaven er å regne ut $\mathbf{H}'(\mathbf{x})$.

Vi har

$$f(u_1, u_2) = u_1 u_2^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial u_1} = u_2^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial u_2} = 2u_1 u_2$$

og

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 \qquad g_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3$$

gir

$$g_1'(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 0) \qquad g_2'(x_1, x_2, x_3) = (0, x_3, x_2)$$

Det betyr

$$\begin{aligned} \mathbf{H}'(\mathbf{x}) &= (u_2^2, 2u_1 u_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & x_3 & x_2 \end{pmatrix} \\ &= (u_2^2, u_2^2 + (2u_1 u_2)x_3, (2u_1 u_2)(x_2)) \end{aligned}$$

Setter vi inn for $u_1 = g_1(x_1, x_2, x_3)$ og $u_2 = g_2(x_1, x_2, x_3)$ og regner ut, får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{H}'(\mathbf{x}) &= (x_2^2 x_3^2, x_2^2 x_3^2 + 2(x_1 + x_2)x_2 x_3 x_3, 2(x_1 + x_2)x_2 x_3 x_2) \\ &= (x_2^2 x_3^2, 2x_1 x_2 x_3^2 + 3x_2^2 x_3^2, 2x_1 x_2^2 x_3 + 2x_2^3 x_3) \end{aligned}$$

Definisjon

Anta at $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^m$ *er en funksjon i* n *variable som er deriverbar i punktet* $\mathbf{a} \in A$*. Affinavbildningen* $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *gitt ved*

$$T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{F}'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

kalles lineariseringen til $\mathbf{F}$ *i punktet* $\mathbf{a}$*.*

TEOREM 2.8.4

Anta at $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^m$ er en funksjon av n variable som er deriverbar i punktet $\mathbf{a}$, og la $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}$ være lineariseringen til $\mathbf{F}$ i $\mathbf{a}$. Da er

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{r}|}\big(\mathbf{F}(\mathbf{a}+\mathbf{r}) - T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(\mathbf{a}+\mathbf{r})\big) = \mathbf{0}$$

Det finnes ingen annen affinavbildning $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ slik at

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{0}} \frac{1}{|\mathbf{r}|}\big(\mathbf{F}(\mathbf{a}+\mathbf{r}) - \mathbf{G}(\mathbf{a}+\mathbf{r})\big) = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{a}+\mathbf{r}) - T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(\mathbf{a}+\mathbf{r}) &= \mathbf{F}(\mathbf{a}+\mathbf{r}) - \mathbf{F}(\mathbf{a}) - \mathbf{F}'(\mathbf{a})(\mathbf{a}+\mathbf{r}-\mathbf{a})\\ &= \mathbf{F}(\mathbf{a}+\mathbf{r}) - \mathbf{F}(\mathbf{a}) - \mathbf{F}'(\mathbf{a})(\mathbf{r})\end{aligned}$$

som betyr at

$$\frac{1}{|\mathbf{r}|}(\mathbf{F}(\mathbf{a}+\mathbf{r}) - T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(\mathbf{a}+\mathbf{r})) \to \mathbf{0}.$$

når $|\mathbf{r}| \to 0$

Eksempel:

Vi skal linearisere funksjonen

$$f(u_1, u_2) = u_1 u_2^2$$

i punktet $\mathbf{a} = (1, -1)$. Vi har

$$f'(u_1, u_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1} \quad \frac{\partial f}{\partial u_2}\right) = \left(u_2^2 \quad 2u_1 u_2\right)$$

Setter inn for punktet:

$$f(1, -1) = 1 \qquad f'(1, -1) = (1 \quad -2)$$

Det gir

$$T_{\mathbf{a}}(\mathbf{u}) = f(1, -1) + f'(1, -1)\begin{pmatrix} u_1 - 1 \\ u_2 + 1 \end{pmatrix} = 1 + (1 \quad -2)\begin{pmatrix} u_1 - 1 \\ u_2 + 1 \end{pmatrix} = u_1 - 2u_2 - 2$$

EKSEMPEL 2.8.3

Vi skal finne lineariseringen til funksjonen $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2y \\ 2xyz \end{pmatrix}$$

i punktet $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. La oss først regne ut Jacobi-matrisen til $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F}'(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ 2yz & 2xz & 2xy \end{pmatrix}$$

I punktet a har vi dermed

$$F'(1,-2,-1) = \begin{pmatrix} 2\cdot 1\cdot(-2) & 1^2 & 0 \\ 2\cdot(-2)\cdot(-1) & 2\cdot 1\cdot(-1) & 2\cdot 1\cdot(-2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Vi har også

$$F(1,-2,-1) = \begin{pmatrix} 1^2\cdot(-2) \\ 2\cdot 1\cdot(-2)\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vi kan nå regne ut lineariseringen. Med $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ får vi:

$$\begin{aligned}
T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{F}'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4x + y \\ 4x - 2y - 4z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x + y + 4 \\ 4x - 2y - 4z - 8 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Altså er

$$T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -4x + y + 4 \\ 4x - 2y - 4z - 8 \end{pmatrix}$$

♣

Oppgaver fra denne uka:

1.9: 1-7,11,14 1.10: 1,3,5,7 2.7: 1,5-8 2.8: 1

Egenforberedelser 21/1 $\longrightarrow$ 24/1

a) Tegn noen kurver i planet
b) Tegn inn noen tangenter til kurvene
c) Hvis kurvene beskriver en biltur (med konstant fart); tegn inn piler som viser bilens hastighet og akselerasjon.