MAT 1110, 28. januar 2022

∗ Kurveintegraler for skalarfelt
∗ Kurveintegraler for vektorfelt

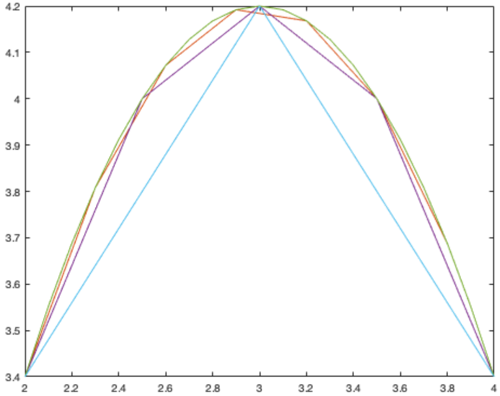
Arne B. Sletsjøe
Universitetet i Oslo

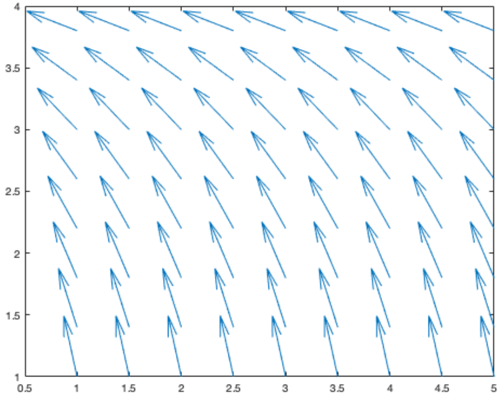
Motivasjon

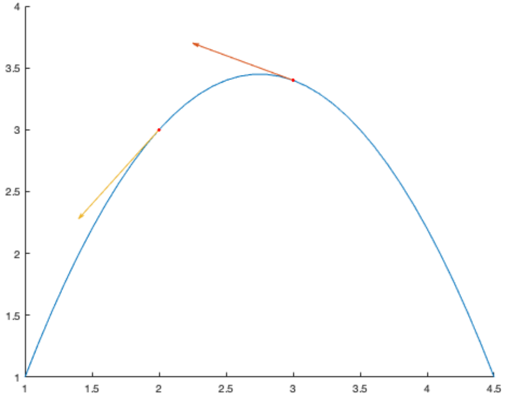
Hvor mye stein er det i den kinesiske mur?

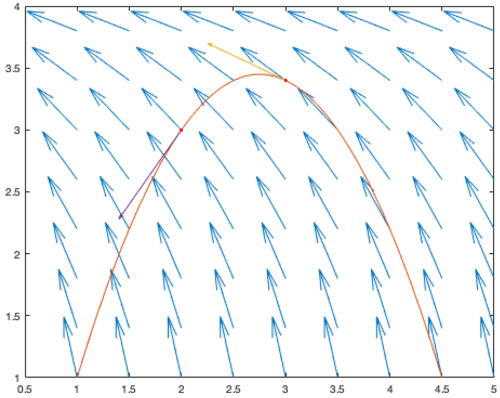
Hva er volumet av snora?

Hvor mye energi kreves for å løpe opp en bakke?


4.2
4.1
4
3.9
3.8
3.7
3.6
3.5
3.4
2
2.2
2.4
2.6
2.8
3
3.2
3.4
3.6
3.8
4


4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5


4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5


4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

Teori

Definisjon

Anta at $f : A \to \mathbb{R}$ *er en funksjon i* n *variable og at* $\mathbf{r} : [a, b] \to A$ *er en stykkvis glatt parametrisering av en kurve* $\mathcal{C}$.
Linjeintegralet/Kurveintegralet $\int_{\mathcal{C}} f\, ds$ *av skalarfeltet* f *er definert ved*

$$\int_{\mathcal{C}} f\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \cdot |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

forutsatt at integralet eksisterer.

Definisjon

Anta at $\mathbf{r}_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *og* $\mathbf{r}_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ *er to stykkvis glatte parametriseringer. Vi sier at* $\mathbf{r}_1$ *og* $\mathbf{r}_2$ *er* **ekvivalente** *dersom det finnes en funksjon* $\phi : [a,b] \to [c,d]$ *slik at*

(i) $\mathbf{r}_2(\phi(t)) = \mathbf{r}_1(t)$ *for alle* $t \in [a,b]$*,*

(ii) ϕ *er kontinuerlig med verdimengde* $[c,d]$*,*

(iii) ϕ' *er kontinuerlig og ulik 0 på intervallet* (a,b)*.*

Dersom ϕ *er strengt voksende sier vi at* $\mathbf{r}_1$ *og* $\mathbf{r}_2$ *har* **samme orientering***, og dersom* ϕ *er strengt avtagende sier vi at* $\mathbf{r}_1$ *og* $\mathbf{r}_2$ *har* **motsatt orientering***,*

Setning

Anta at $\mathbf{r}_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *og* $\mathbf{r}_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ *er to ekvivalente stykkvis glatte parametriseringer av en kurve* $\mathcal{C}$*. Da har integralet* $\int_{\mathcal{C}} f\, ds$ *samme verdi uansett hvilken parametrisering vi bruker.*

Gjennomløper vi kurven i motsatt retning kan vi bruke $\phi(t) = a + b - t$. Det gir

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(\phi(t)) = \mathbf{r}_2(a+b-t), \qquad \mathbf{r}_1'(t) = -\mathbf{r}_2'(a+b-t),$$

og dermed

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} f\, ds &= \int_a^b f(\mathbf{r}_1(t)) \cdot |\mathbf{r}_1'(t)|\, dt \\ &= \int_a^b f(\mathbf{r}_2(a+b-t)) \cdot |-\mathbf{r}_2'(a+b-t)|\, dt\end{aligned}$$

Setter vi $u = a + b - t$ får vi at $t = a$ gir $u = b$ og motsatt. Det gir

$$= \int_b^a f(\mathbf{r}_2(u)) \cdot |\mathbf{r}_2'(u)|\,(-du) = \int_a^b f(\mathbf{r}_2(u)) \cdot |\mathbf{r}_2'(u)|\, du$$

Siden $\phi'(t) \neq 0$, må kurven gjennomløpes den ene eller andre veien og ikke en blanding.

Bevis.

Vi har

$$
\begin{aligned}
I = \int_{\mathcal{C}} f\, ds &= \int_a^b f(\mathbf{r}_1(t)) \cdot |\mathbf{r}_1'(t)|\, dt \\
&= \int_a^b f(\mathbf{r}_2(\phi(t)) \cdot |(\mathbf{r}_2(\phi(t))'|\, dt \\
&= \int_a^b f(\mathbf{r}_2(\phi(t)) \cdot |(\mathbf{r}_2'(\phi(t)))| \cdot \phi'(t)\, dt
\end{aligned}
$$

Vi setter $u = \phi(t)$, $du = \phi'(t)\, dt$, $\phi(a) = c$ og $\phi(b) = d$. Det gir

$$
I = \int_c^d f(\mathbf{r}_2(u) \cdot |(\mathbf{r}_2'(u))|\, du
$$

$\square$

Husk at

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)}$$

og derfor

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) &= \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot (\mathbf{T}(t) v(t)) \\ &= (\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{T}(t))\, v(t) \end{aligned}$$

hvor

$$f(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{T}(t)$$

er et skalarfelt (funksjon i en variabel).

Integral av vektorfelt $\longrightarrow$ Integral av skalarfelt

Definisjon

Anta at $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^n$ *er en funksjon i* n *variable og at* $\mathbf{r} : [a, b] \to A$ *er en stykkvis glatt parametrisering av en orientert kurve* $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$*. Da er* **linjeintegralet/kurveintegralet** $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \, d\mathbf{r}$ *av vektorfeltet* $\mathbf{F}$ *definert ved*

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \, d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt$$

forutsatt at integralet eksisterer.

Setning

Anta at $\mathbf{r}_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *og* $\mathbf{r}_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ *er to ekvivalente stykkvis glatte parametriseringer av en kurve* $\mathcal{C}$ *med samme orientering. Da har integralet* $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ *samme verdi uansett hvilken parametrisering vi bruker.*

Gjennomløper vi kurven med motsatt orientering kan vi bruke $\phi(t) = a + b - t$. Det gir

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(a + b - t) \qquad \mathbf{r}_1'(t) = -\mathbf{r}_2'(a + b - t),$$

Vi har

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot\, d\mathbf{r}_1 &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) \cdot \mathbf{r}_1'(t)\, dt \\ &= -\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(a + b - t)) \cdot \mathbf{r}_2'(a + b - t)\, dt\end{aligned}$$

og tilsvarende

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot\, d\mathbf{r}_2 &= \int_b^a \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(u)) \cdot \mathbf{r}_2'(u)\, du \\ &= -\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(a + b - t)) \cdot \mathbf{r}_2'(a + b - t)\,(-dt) \\ &= -\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) \cdot (-\mathbf{r}_1'(t))\,(-dt) = -\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot\, d\mathbf{r}_1\end{aligned}$$

Eksempler

Vi skal beregne kurveintegralet av funksjonen $f(x,y) = \frac{y}{x}$ langs parabelen P, gitt ved $\mathbf{r}(t) = (t, \frac{1}{2}t^2)$ mellom $t = 0$ og $t = \sqrt{3}$. Merk at langs denne kurven ser funksjonen ut som

$$f(\mathbf{r}(t)) = f(t, \frac{1}{2}t^2) = \frac{t^2}{2t} = \frac{1}{2}t$$

og integralet blir

$$\begin{aligned}
\int_P f\, ds &= \int_0^{\sqrt{3}} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(1)^2 + (t)^2} dt \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2} t \cdot \sqrt{1 + t^2} dt \\
&= [\frac{1}{6}(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}]_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{6}(4^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{7}{6}
\end{aligned}$$

Vi skal beregne kurveintegralet av funksjonen $f(x, y) = -y$ langs sirkelen C, gitt ved $\mathbf{r}(t) = (R\cos t, R\sin t)$ fra $t = 0$ til $t = 2\pi$. Langs denne kurven ser funksjonen ut som

$$f(\mathbf{r}(t)) = f(R\cos t, R\sin t) = -R\sin t$$

Det gir integral

$$\begin{aligned}\int_C f\,ds &= \int_0^{2\pi} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}dt \\ &= -\int_0^{2\pi} R^2 \sin t\,dt = -R^2[-\cos t]_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

Integralet i det siste eksemplet beregnes rundt en hel sirkel slik at de to endepunktene faktisk er samme punkt i planet, $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(2\pi)$. Slike integral har et eget (meget illustrerende) symbol, vi skriver

$$\oint_C f \, ds$$

som betyr at vi integrerer f langs en **lukket kurve** C.

La $f(x, y)$ være en funksjon i to variable og anta at den parametriserte kurven C gitt ved $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ beskriver en nivåkurve for funksjonen, dvs. at $f((x(t), y(t))) = c$, c en konstant. Gradienten til f danner et vektorfelt ∇f i planet. Da er verdien av vektorfeltet ∇f langs nivåkurven C lik 0. Vi kan se dette ved å regne ut

$$\begin{aligned}\nabla f \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{r}}(t) &= \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) \\ &= \frac{d}{dt} f((x(t), y(t))) = \frac{d}{dt} c = 0\end{aligned}$$

La $f(t) = (R\cos t, R\sin t)$ og $g(x,y) = xy$. Da har vi $h(t) = g(f(t)) = R^2 \cos t \sin t$ og

$$h'(t) = -R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t = R^2(\cos^2 t - \sin^2 t)$$

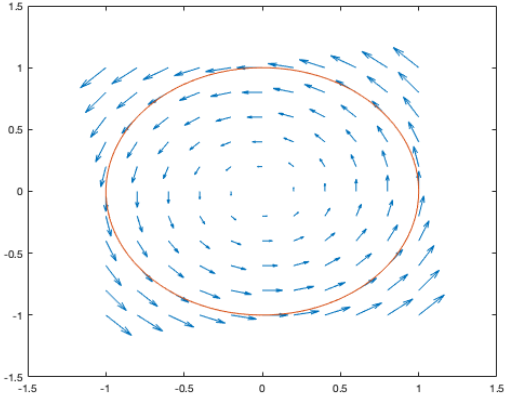
Bruker vi kjerneregelen på den samme funksjonen får vi

$$\begin{aligned} h'(t) &= (y,x) \cdot (-R\sin t, R\cos t) \\ &= R\sin t(-R\sin t) + R\cos t R\cos t \\ &= R^2(\cos^2 t - \sin^2 t) \end{aligned}$$

siden $x = R\cos t$, og $y = R\sin t$.

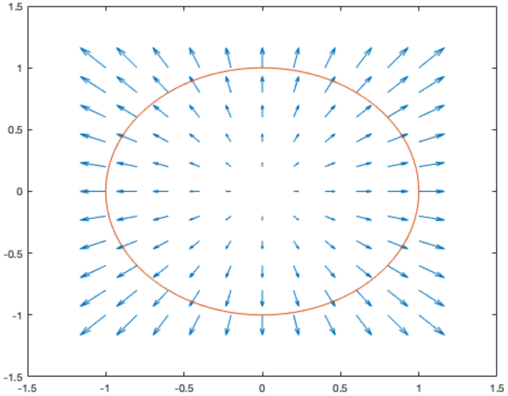
La $\mathbf{F}(x,y) = (-y,x)$ være et vektorfelt i planet (tangentfeltet til konsentriske sirkler) og $\mathbf{r}(t) = (R\cos t, R\sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$, en sirkulær kurve. Kurveintegralet av vektorfeltet $\mathbf{F}$ langs C er gitt ved

$$\begin{aligned}
&\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_C \, ds \\
&\quad = \int_0^{2\pi} (-R\sin t)(-R\sin t) + R\cos t \cdot R\cos t \, dt \\
&\quad = \int_0^{2\pi} R^2(\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt \\
&\quad = \int_0^{2\pi} R^2 \, dt = 2\pi R^2
\end{aligned}$$


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5

La $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$ være et vektorfelt i planet og $\mathbf{r}(t) = (R\cos t, R\sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, en sirkulær kurve. Kurveintegralet av vektorfeltet $\mathbf{F}$ langs C er gitt ved

$$\begin{aligned}
&\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_C \, ds \\
&\quad = \int_0^{2\pi} (R\cos t)(-R\sin t) + (R\sin t) \cdot (R\cos t)\, dt \\
&\quad = \int_0^{2\pi} 0\, dt = 0
\end{aligned}$$



1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5

La $\mathbf{F}(x, y) = (2y, -x)$ være et vektorfelt i planet og $\mathbf{r}(t) = (t, \frac{1}{2}t^2)$, $0 \leq t \leq 1$. Kurveintegralet av vektorfeltet $\mathbf{F}$ langs C er gitt ved

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_C \, ds &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt \\ &= \int_0^1 (t^2 \cdot 1 + (-t)t) \, dt = 0\end{aligned}$$

Hvorfor blir dette 0? Kurven er parabelen $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2$. Tangentvektoren i punktet (x, y) har stigningstall $f'(x) = x$, dvs. tangentvektorfeltet har retning $(1, x)$. Det oppgitte vektorfeltet har retning $(2y, -x)$. Prikkproduktet av disse to retningene er $(1, x) \cdot (2y, -x) = 2y - x^2$. Men på kurven $y = \frac{1}{2}x^2$ er dette tallet lik 0, og vektorfeltet har derfor ingen verdi langs med kurven.

Litt mer teori

Setning

(i) $\int_{\mathcal{C}} (f+g)\, ds = \int_{\mathcal{C}} f\, ds + \int_{\mathcal{C}} g\, ds$

(ii) $\int_{\mathcal{C}} af\, ds = a \int_{\mathcal{C}} f\, ds \quad a \in \mathbb{R}$

(iii) *For en oppdeling av kurven $\mathcal{C}$;*

$$\int_{\mathcal{C}} f\, ds = \int_{\mathcal{C}_1} f\, ds + \int_{\mathcal{C}_2} f\, ds + \cdots + \int_{\mathcal{C}_m} f\, ds$$

Setning

(i) $\int_{\mathcal{C}} (\mathbf{F} + \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$

(ii) $\int_{\mathcal{C}} a\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = a \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad a \in \mathbb{R}$

(iii) *For en oppdeling av kurven $\mathcal{C}$;*

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \cdots + \int_{\mathcal{C}_m} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$