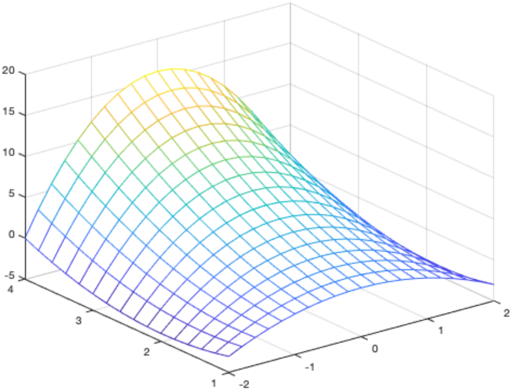
MAT 1110, 31. januar 2022

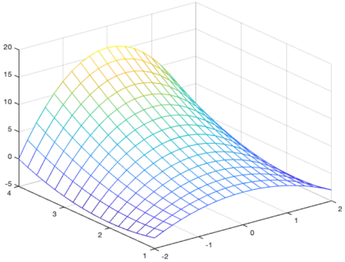
∗ Gradienter og konservative felt

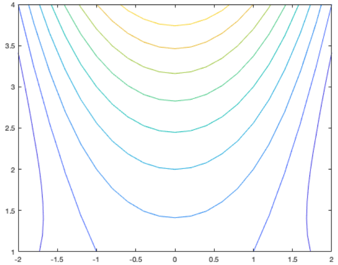
Arne B. Sletsjøe
Universitetet i Oslo

Gradienter

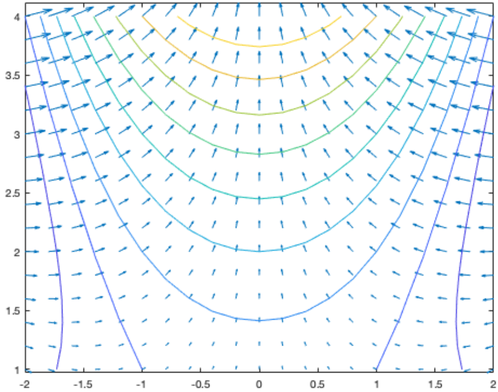


$$z = f(x, y) = y^2 - x^2 y$$





$$z = f(x, y) = y^2 - x^2 y$$



$$\nabla f(x, y) = (-2xy, 2y - x^2)$$

Definisjon

La $f(x_1, \ldots, x_n)$ *være en deriverbar funksjon i* n *variable.* **Gradienten** *til* f *i punktet* $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ *er gitt ved*

$$\nabla f(\underline{a}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{a}))$$

Gradienten definerer et vektorfelt

$$\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

som vi kaller **gradientfeltet** *til funksjonen* f*.*

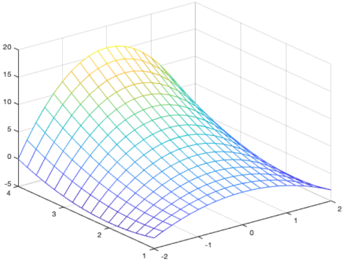
Eksempel

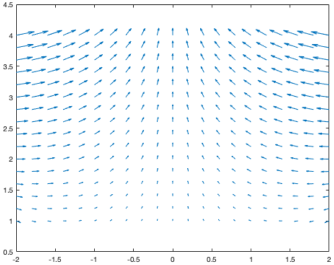
Funksjonen $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ *har gradient* $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$*. Dette feltet sies å være et* **radialfelt***, siden gradienten i hvert punkt er parallell med posisjonsvektoren.*

Gradienten til en funksjon kan brukes til å finnne retningen der funksjonen endrer seg mest.

Setning

La $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ *være en derverbar funksjon i* n *variable. Da vil* ∇f *være en vektor som peker i retningen hvor* f *vokser mest, dvs gradienten står normalt på nivåmengdene.*





Bevis.

La $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ være en kurve som er helt inneholdt i en nivåmengde for f, dvs. $g(t) := f(\gamma(t)) = C$ for alle t. Kjerneregelen gir at

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \gamma_1'(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \gamma_n'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$$

* Kurven $\gamma(t)$ ligger helt inne i nivåmengden, og den deriverte $\gamma'(t)$ er derfor tangent til nivåmengden.
* Siden gardienten står normalt på alle tangenter, står den normalt på hele mengden.
* Gradienten står dermed normalt på nivåmengdene.
* Funksjonen er konstant langs nivåmengdene og den retningen som gir størst endring er den retningen som er lengst fra å ligge i nivåmengdene, nemlig retningene normalt på nivåmengden. $\square$

Eksempel

Gradienten til funksjonen $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ *er* $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$*, mens nivåflatene er kuleskall gitt ved* $x^2 + y^2 + z^2 = C$*. Det stemmer godt med at* $\nabla f = 2(x, y, z)$ *står normalt på kuleskallene.*

Vi kan bruke gradienten til å beregne endringen av funksjonen langs en vektor.

Definisjon

Den **retningsderiverte** *til en deriverbar funksjon* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *i et punkt* $(a_1, \ldots, a_n)$ *langs en vektor* $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$*, er gitt ved*

$$f_{\mathbf{v}}(a_1, \ldots, a_n) = \nabla f(a_1, \ldots, a_n) \cdot \mathbf{v}$$

Eksempel

Vi har gitt en funksjon $f(x,y,z) = x^2 + yz + 2z^2 + 1$ *og er interessert i å finne den retningsderiverte av* $f(x,y,z)$ *langs vektoren* $\mathbf{v} = (2,-1,0)$ *i punktet* $P = (1,1,1)$.
Vi regner først ut gradienten til funksjonen, $\nabla f = (2x, z, y + 4z)$, *og i punktet* $\nabla f(1,1,1) = (2,1,5)$. *Det gir retningsderivert langs vektoren* $\mathbf{v} = (2,-1,0)$ *gitt ved*

$$\begin{aligned} f_{(2,-1,0)} &= \nabla f(1,1,1) \cdot (2,-1,0) \\ &= (2,1,5) \cdot (2,-1,0) = 3 \end{aligned}$$

Setning

Anta at $\phi : A \to \mathbb{R}$ *er en funksjon i n variable med kontinuerlig gradient. Dersom* $\mathbf{r} : [a, b] \to A$ *parametriserer en stykkvis glatt kurve* $\mathcal{C}$ *som begynner i punktet* $\mathbf{a}$ *og ender i punktet* $\mathbf{b}$*, dvs.* $\mathbf{r}(a) = \mathbf{a}$ *og* $\mathbf{r}(b) = \mathbf{b}$*, så er*

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})$$

Bevis.
Vi bruker at

$$(\phi(\mathbf{r}(t))' = \nabla\phi(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)$$

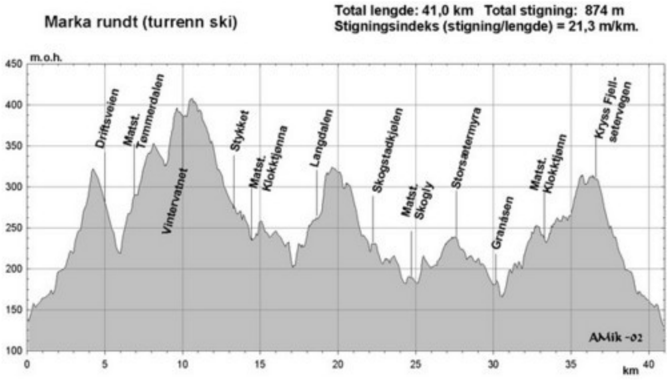
Det gir

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\mathcal{C}} \nabla\phi(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\ &= \int_a^b (\phi(\mathbf{r}(t))'\ dt \\ &= \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})\end{aligned}$$

$\square$

Lukket kurve: $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, gir

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}) = 0$$



Problem

Gitt et vektorfelt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. *Kan vi finne en funksjon* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *slik at* $\mathbf{F} = \nabla f$*?*

Konservative felt

Definisjon

Et vektorfelt F som er slik at det finnes en funksjon f slik at $F = \nabla f$ kalles et **konservativt** *vektorfelt, og funksjonen f kalles et* **potensial** *for F.*

Eksempel

Tyngdefeltet er konservativt

Setning

La $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), \ldots, F_n(\mathbf{x}))$ *være et vektorfelt på* $\mathbb{R}^n$*. En nødvendig betingelse for at vektorfeltet* $\mathbf{F}$ *er konservativt er at*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

for alle $\mathbf{x} \in A$ *og alle indekser* i *og* j*. (Kryssderivasjonstesten)*

Bevis.

For $\mathbf{F} = \nabla\phi$ har vi

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) - \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x_i}}{\partial x_j}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x_j}}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}) = 0\end{aligned}$$

□

Merk. Selv om denne betingelsen er oppfyllt er det ikke sikkert at vektorfeltet har et potensial. F.eks. er betingelsen oppfyllt for $\mathbf{F}(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ (utenfor origo), men i dette tilfellet finnnes det ikke noe potensial. Vi skal komme tilbake til dette eksemplet senere.

Eksempel

Vi har gitt et vektorfelt

$$\mathbf{F}(x, y) = (2xy^4, 4x^2y^3)$$

Vi skal teste om vektorfeltet kan ha et potensial. Vi gjør derivasjonstesten

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy^4) = 8xy^3 \qquad \frac{\partial}{\partial x}(4x^2y^3) = 8xy^3$$

Det gikk bra, og det er dermed gode muligheter for at det finnes et potensial $\phi(x, y)$ *med* $\nabla\phi = \mathbf{F}$.

Kan vi *anti-derivere* vektorfeltet?

Dersom et vektorfelt $\mathbf{F}(x, y) = (p(x, y), q(xy))$ er konservativt, dvs. at det finnes en funksjon $\phi(x, y)$ slik at $\mathbf{F} = \nabla\phi$, så vet vi at

$$p(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

* Betrakter vi variablen y som en konstant, kan vi forsøke å anti-derivere $p(x, y)$ med hensyn på variabelen x.
* Anta at det går bra, og at vi har funnet en funksjon $h(x, y)$ slik at dens partielt deriverte med hensyn på x er $p(x, y)$, $h(x, y)$ er dermed en kandidat til å være et potensial for vektorfeltet.
(*Her må vi imidlertid huske på en viktig detalj, når vi anti-deriverer med hensyn på x og betrakter y som en konstant, vil integrasjonskonstanten ikke bare være en konstant, men en vilkårlig funksjon i y. Slike funksjoner vil jo deriveres på 0 når y betraktes som en konstant og vi deriverer med hensyn på x.)

* Vi skriver $h(x, y) = f(x, y) + g(y)$, der $g(y)$ er en vilkårlig funksjon i y.
* Dersom denne funksjonen skal være en god kandidat til vektorfeltet, må dens partielt deriverte med hensyn på y være den andre funksjonen $q(x, y)$.
* Vi deriverer med hensyn på y og får

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + g'(y)$$

* Dette uttrykket sammenlikner vi med $q(x, y)$, dvs, vi setter

$$q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} + g'(y)$$

Dersom vektorfeltet er konservativt kan vi nå alltid finne en funksjon $g(y)$ slik at dette er oppfylt.

Eksempel

Vi har gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y) = (2xy^4, 4x^2y^3)$$

Kryssderivasjonstesten hindrer ikke at vektorfeltet har et potensial. Vi må i så fall ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^4, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2y^3$$

Integrerer vi $2xy^4$ *med hensyn på* x *får vi* $x^2y^4 + g(y)$, *der* $g(y)$ *er en funksjon kun i* y *og som forsvinner når vi deriverer med hensyn på* x. *Vi deriverer denne funksjonen med hensyn på* y *og sammenlikner med uttrykket over,*

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^4 + g(y)) = 4x^2y^3 + g'(y)$$

Siden dette skal være lik $4x^2y^3$ *slutter vi at* $g'(y) = 0$ *eller at* $g(y) = K$ *dvs. konstant. Et generelt potensial er derfor gitt ved*

$$f(x, y) = x^2y^4 + K$$

Eksempel

Vi har gitt et vektorfelt

$$\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 - 6xy, -3x^2 + 3y^2)$$

Kryss derivasjonstesten gir

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 6xy) = -6x, \quad \frac{\partial}{\partial x}(-3x^2 + 3y^2) = -6x \qquad \textit{OK!!}$$

$\Rightarrow$ *Gode muligheter for at det finnes et potensial* $f(x, y)$ *slik at* $\mathbf{F} = \nabla f$.
Vi må i så fall ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x^2 + 3y^2$$

Integrerer vi $3x^2 - 6xy$ *med hensyn på* x *får vi* $x^3 - 3x^2y + g(y)$,

Eksempel

Derivasjon med hensyn på y gir

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3 - 3x^2 y + g(y)) = -3x^2 + g'(y) = -3x^2 + 3y^2$$

$\Rightarrow g'(y) = 3y^2$ *og* $g(y) = y^3 + K$ *hvor* K *er en integrasjonskonstant. Et generelt potensial er derfor gitt ved*

$$f(x, y) = x^3 - 3x^2 y + y^3 + K$$

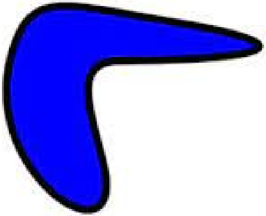
Eksempel

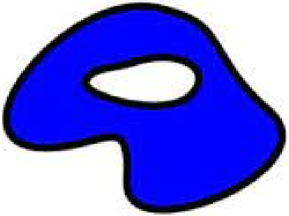
Tilbake til vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ *som vi påsto ikke er konservativt. Det kan vi nå vise på følgende måte: La* C *være enhetssirkelen gitt ved* $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. *Da har vi*

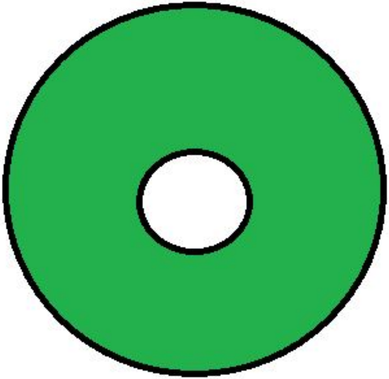
$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\right) \\
&\qquad \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt \\
&= 2\pi \neq 0
\end{aligned}$$

som betyr at feltet ikke kan være konservativt.

Enkeltsammenhengende område







$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

Setning

La $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), \ldots, F_n(\mathbf{x}))$ *være et vektorfelt på* $A \subset \mathbb{R}^n$*, med kontinuerlige partiellderiverte og hvor* A *er et åpent, enkeltsammenhengende område i* $\mathbb{R}^n$*. Da er vektorfeltet* $\mathbf{F}$ *konservativt hvis og bare hvis*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

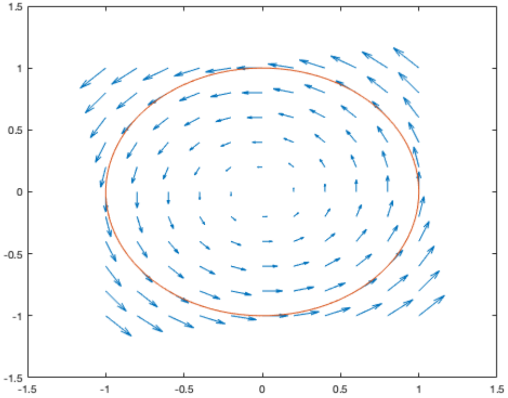
for alle $\mathbf{x} \in A$ *og alle indekser* i *og* j*.*

La $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$ være et vektorfelt i planet (tangentfeltet til konsentriske sirkler) og $\mathbf{r}(t) = (R\cos t, R\sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, en sirkulær kurve. Kurveintegralet av vektorfeltet $\mathbf{F}$ langs C er gitt ved

$$\begin{aligned}
&\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_C \, ds \\
&\quad = \int_0^{2\pi} (-R\sin t)(-R\sin t) + R\cos t \cdot R\cos t \, dt \\
&\quad = \int_0^{2\pi} R^2(\sin^2 t + \cos^2 t) \, dt \\
&\quad = \int_0^{2\pi} R^2 \, dt = 2\pi R^2
\end{aligned}$$

Ikke konservativt siden

$$\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} = 2$$


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5

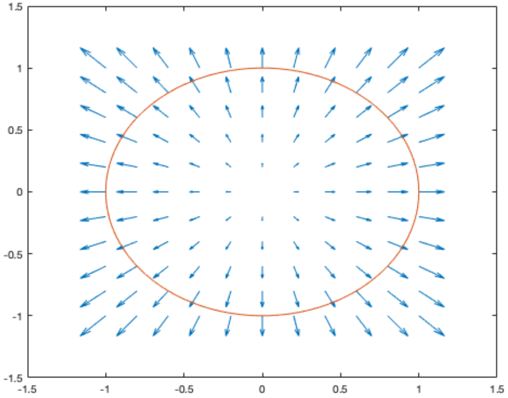
La $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$ være et vektorfelt i planet og $\mathbf{r}(t) = (R\cos t, R\sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$, en sirkulær kurve. Kurveintegralet av vektorfeltet $\mathbf{F}$ langs C er gitt ved

$$\begin{aligned}
&\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_C \, ds \\
&\quad = \int_0^{2\pi} (R\cos t)(-R\sin t) + (R\sin t) \cdot (R\cos t) \, dt \\
&\quad = \int_0^{2\pi} 0 \, dt = 0
\end{aligned}$$

Her har vi

$$\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} = 0$$

med potensialfunksjon $\phi(x, y) = x^2 + y^2 + K$


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5

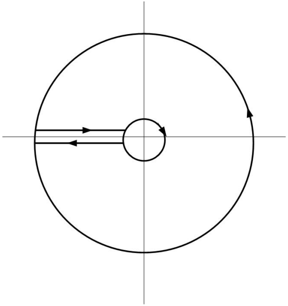
Eksempel

Nok en gang tilbake til vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ *som ikke er konservativt. La* C *være enhetssirkelen med radius* R *gitt ved* $\mathbf{r}(t) = (R\cos t, R\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-R\sin t}{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t}, \frac{R\cos t}{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t}\right) \cdot (-R\sin t, R\cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi$$

som er uavhengig av R. *La nå* $R \to 0$. *Vi integrerer langs en sirkel som går mot et punkt, samtidig som* $(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}) \to (\infty, \infty)$. *Mao. vi ender opp med* $0 \cdot \infty$ *som jo kan bli hva som helst. Dersom definisjonsområdet er enkeltsammenhengende vil funksjonen nødvendigvis være begrenset på alle sirklene, mindre enn en fast verdi* M. *I det tilfellet ville vi fått at grensen er* $\leq 0 \cdot M = 0$.

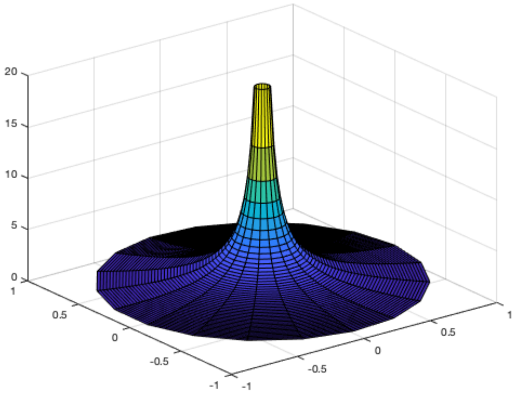


La $\mathcal{C}_R$ være den ytterste sirkelen og $\mathcal{C}_R$ den innerste. Vi lar $\mathcal{L} : \mathbf{r}(t) = (t, 0)$ hvor $-R \leq t \leq -r$. Da har vi $\mathbf{r}'(t) = (1, 0)$ og $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (0, \frac{1}{t})$. Det gir

$$\int_{\mathcal{L}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-R}^{-r} (1, 0) \cdot (0, \frac{1}{t})\, dt = 0$$

Hvis vi setter $\mathcal{C} = \mathcal{C}_R \cup \mathcal{L} \cap (-\mathcal{C}_r \cap (-\mathcal{L})$ får vi

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi + 0 - 2\pi - 0 = 0$$


20
15
10
5
0
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1