MAT 1110, 4. februar 2022

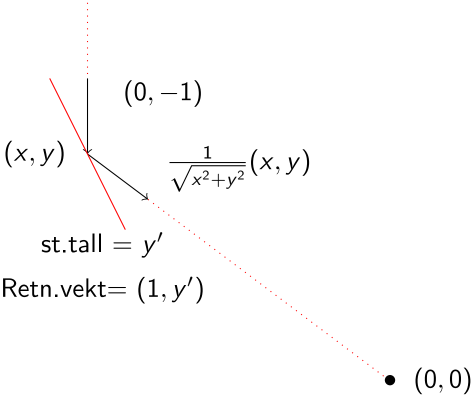
∗ Kjeglesnitt

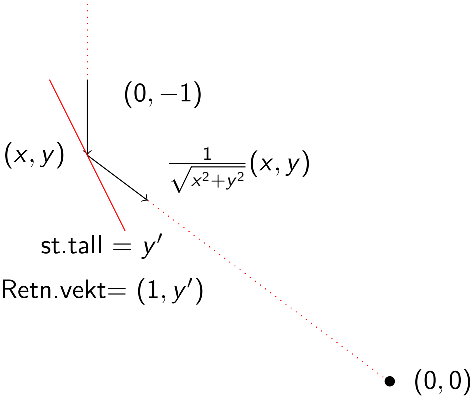
Arne B. Sletsjøe
Universitetet i Oslo

Motivasjon

Problem:

Finn en kurve slik at vertikale stråler reflekteres til punktet $(0,0)$.





$$(0,-1)\cdot(1,y') = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)\cdot(1,y')$$

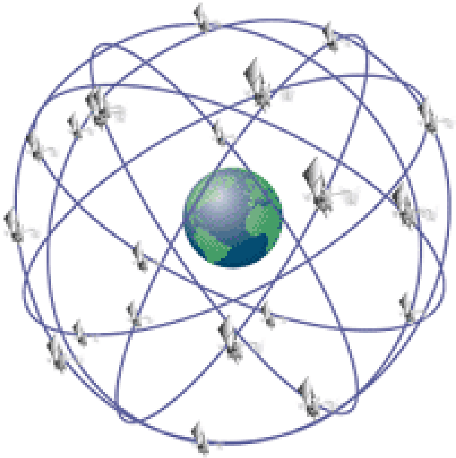
$$\frac{d}{dx}(-y) = -y' = \frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{d}{dx}\sqrt{x^2+y^2}$$

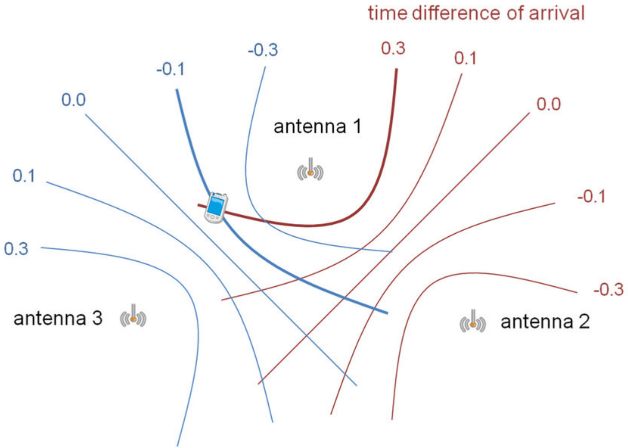
$$-y + K = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y^2 - 2Ky + K^2 = x^2 + y^2$$

(setter $C = \frac{-1}{2K}$)

$$y = Cx^2 - \frac{1}{4C}$$

Parabel !




time difference of arrival
-0.3
0.3
-0.1
0.1
0.0
0.0
antenna 1
0.1
-0.1
0.3
-0.3
antenna 3
antenna 2

To punkter (a_1, b_1) og $(a_{,} b_2)$; finn alle punkter (x, y) slik at differensen mellom avstandene til de punktene er konstant:

$$\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}-\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}=d$$

For enkelthet skyld setter vi $(a_1, b_1) = (-1, 0)$ og $(a_{,} b_2) = (1, 0)$;

$$(\sqrt{(x+1)^2+y^2})^2 = (\sqrt{(x-1)^2+y^2}+d)^2$$

eller

$$x^2+2x+1+y^2 = x^2-2x+1+y^2+2d\sqrt{(x-1)^2+y^2}+d^2$$

$$4x-d^2 = 2d\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

som kvadrert gir

$$16x^2-8xd^2+d^4 = 4d^2((x-1)^2+y^2)$$

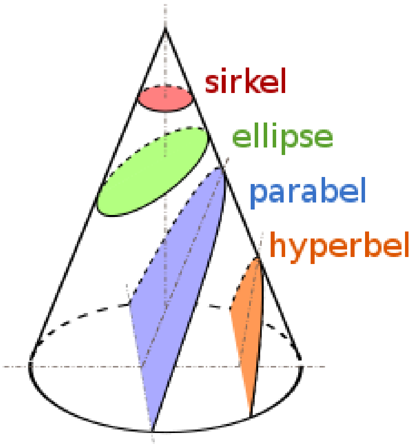
og ryddet:

$$(16-4d^2)x^2-4d^2y^2 = 4d^2-d^4$$

$$(16-4d^2)x^2-4d^2y^2=4d^2-d^4$$

Siden $d \leq 2$ må vi ha $16-4d^2 \geq 0$ og $-4d^2 \leq 0$.

Hyperbel !


sirkel
ellipse
parabel
hyperbel

Teori

Likning for kjegle:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Likningen for et plan (ikke gjennom origo og parallell med y-aksen):

$$z = ax + b$$

Snittet av de to:

$$(ax+b)^2 = a^2x^2+2abx+b^2 = x^2+y^2 \quad \Rightarrow \quad (a^2-1)x^2+2abx-y^2 = -b^2$$

som vi kan skrive

$$(a^2 - 1)(x - \frac{ab}{a^2-1})^2 - y^2 = (\frac{ab}{a^2-1})^2 - b^2$$

Ulike valg av a og b gir oss alle kjeglesnittene.

Standardformform for en parabel med brennpunkt i $(a, 0)$ og styrelinje $x = -a$:

$$y^2 = 4ax$$

Aksen til parabelen er linja gjennom brennpunktet, normalt på styrelinja. Avstanden a fra brennpunktet til toppunktet kalles **brennvidden** til parabelen.

Flytting av toppunktet til (p, q) gir likning

$$(y - q)^2 = 4a(x - p)$$

Parabelen kan dreies, spesielt med en vinkel $\frac{\pi}{2}$:

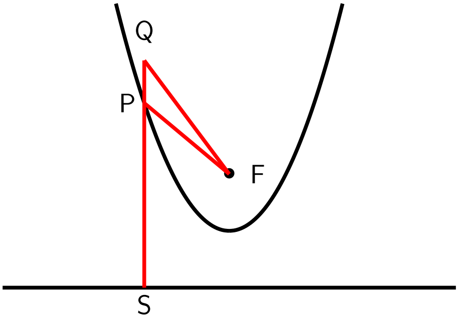
$$x^2 = 4ay$$

(men vi kan også dreie med andre vinkler, som vil gi en nokså anderledes utseende likning)

Koordinatfri beskrivelse av parabel (alternativ definisjon):

Definisjon

Gitt en linje ℓ og et punkt F, $F \notin \ell$. Mengden av punkter P slik at $d(\ell, P) = |PF|$ beskriver en parabel. $d(\ell, P)$ er avstanden fra punktet P til linja ℓ, dvs $d(\ell, P) = |SP|$ der S er **fotpunktet** *fra P på linja ℓ.*



For Q som ligger inne i parabelen har vi

$$|QS| = |QP| + |PS| = |QP| + |PF| \geq |QF|$$

hvor den siste ulikheten er trekantulikheten.

Eksempel

Vi skal vise at likningen

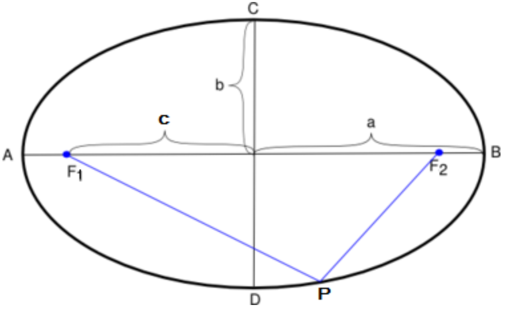
$$y^2 + 4y - 8x + 20 = 0$$

beskriver en parabel. 1) Gjør om til fullstendige kvadrat:

$$y^2 + 4y + (4 - 4) - 8x + 20 = (y + 2)^2 - 8x + 16$$

2) Skriver på standardform:

$$8(x - 2) = (y + 2)^2$$



Punktene F_1 og F_2 kalles ellipsens **brennpunkter**, a er **store halvakse** og b er **llille halvakse**. **Eksentrisiteten** til elllipsen er gitt ved

$$e = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$$

For $e = 0$ har vi en sirkel, mens $e \to 1$ gir en svært langstrakt ellipse.

Nullpunktsmengden til likningen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

beskriver en ellipse (på standardform) med halvakser a og b, sentrum i $(0, 0)$ og brennpunkter i $(\pm c, 0)$ hvor $c^2 = a^2 - b^2$.

Koordinatfri beskrivelse av ellipse (alternativ definisjon):

Definisjon

Gitt en linje ℓ og et punkt F, $F \notin \ell$. Mengden av punkter P slik at $d(\ell, P) = e|PF|$ hvor $0 < e < 1$ beskriver en ellipse med **eksentrisitet** *e.*

Setning

Gitt en ellipse med store halvakse a: Da er summen av avstandene fra et punkt $P = (x, y)$ på ellipsen til de to brennpunktene F_1 og F_2 konstant lik $2a$.

Bevis.

La ellipsen være gitt ved

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

eller mer hensiksmessig i dette beviset

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Vi erstatter $b^2 = a^2 - c^2$ og får

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Flytter litt rundt på noen ledd:

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x - c)^2 + a^2y^2$$

$\square$

Bevis.

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2$$

Kvadratrot på begge sider gir:

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + a^2y^2}$$

På den anne side ser vi (dette innebærer noen regning) at

$$|PF_1| + |PF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

gir

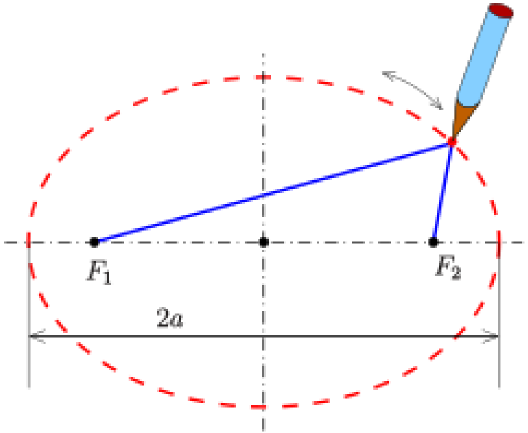
$$(\sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$$

eller

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

som er det samme som

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + a^2y^2}$$



F_1
F_2
$2a$

Eksempel

Betrakt likningen

$$9x^2 + 4y^2 - 36x + 24y + 36 = 0$$

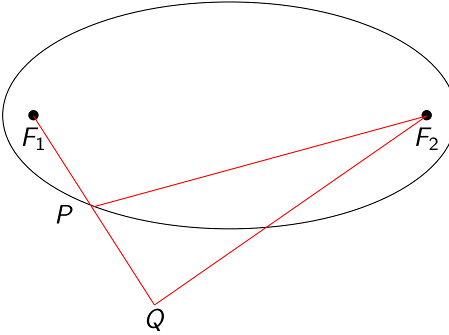
Vi skriver som fullstendige kvadrat:

$$\begin{aligned} 9x^2 + 4y^2 - 36x + 24y + 36 &= 9x^2 - 36x + 36 - 36 + 4y^2 + 24y + 36 - 36 + 36 \\ &= 9(x-2)^2 + 4(y+3)^2 - 36 = 0 \end{aligned}$$

Dette kan vi skrive

$$\frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{(y+3)^2}{3^2} = 1$$

Sentrum: $(2, -3)$, *halvakser* $a = 2$, $b = 3$, *mens* $c = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$ *gir brennpunkter i* $(2, -3 \pm \sqrt{5})$.



Setning

Summen av avstandene til de to brennpunktene er mindre enn $2a$ inne i ellipsen og større utenfor.

Bevis.

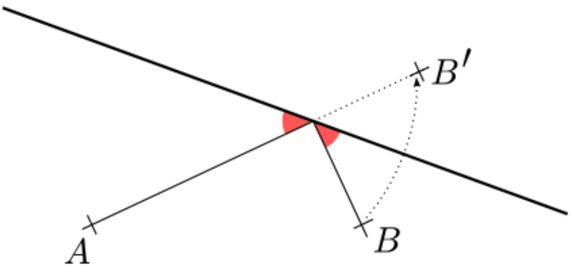
$$|F_1Q| + |F_2Q| = |F_1P| + |PQ| + |F_2Q| \geq |F_1P| + |PF_2|$$

ved trekantulikheten. □

Setning

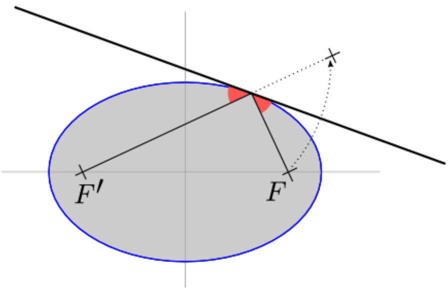
En stråle som går ut fra det ene brennpunktet på en ellipse, reflekteres gjennom det andre.

Bevis.



Vi skal finne korteste vei fra A til B som berører linja. Refleksjonen av B om linja kaller vi B'. Avstanden fra A til B og fra A til B' er den samme og siden vi vil ha den korteste veien, må AB' være den rette linja. Det betyr at de to røde vinklene er like store. $\square$

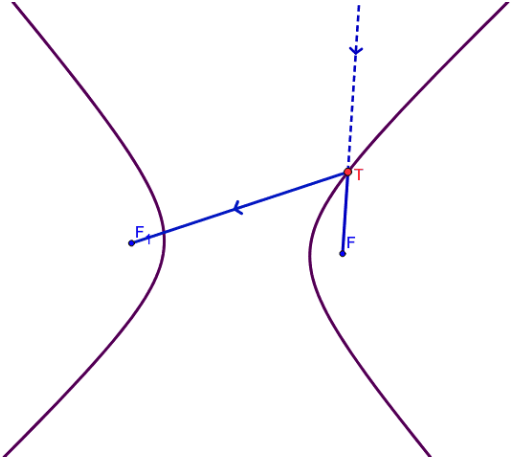
Bevis.



La $f(X) = |FX| + |F'X|$. Da har vi at ellipsen er gitt ved $f^{-1}(f(P))$ hvor P er et punkt på ellipsen. Siden punkter X utenfor ellipsen har $f(X) > f(P)$ og innenfor $f(X) < f(P)$ så vil for alle punkter Y på tangentlinja punktet som også ligger på ellipsen minimere $f(Y) = |FY| + |F'Y|$. Men det betyr igjen at de to røde vinklene er like store. $\square$

Setning

En stråle som kommer fra utsiden av en hyperbel med retning mot det ene brennpunktet reflekteres i retning av det andre brennpunktet.


F
F
T

Eksempel

Betrakt likningen

$$-3x^2 + 4y^2 + 6x + 32y + 49 = 0$$

Vi skriver som fullstendige kvadrat:

$$\begin{aligned}-3x^2 + 4y^2 + 6x + 32y + 49 &= -3x^2 + 6x - 3 + 3 + 4y^2 + 32y + 64 - 64 + 49 \\ &= -3(x-1)^2 + 4(y+4)^2 - 12 = 0\end{aligned}$$

Dette kan vi skrive

$$\frac{(y+4)^2}{\sqrt{3}^2} - \frac{(x-1)^2}{2^2} = 1$$

Setning

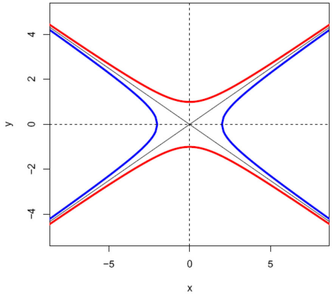
Hyperblene

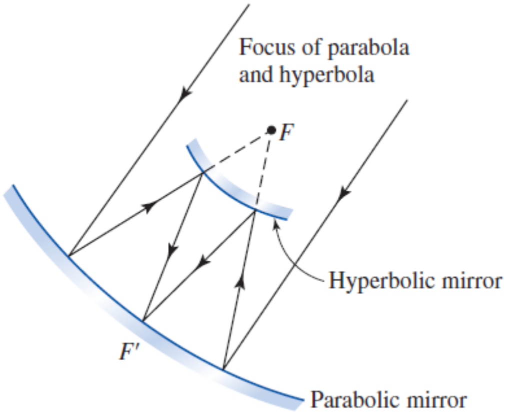
$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = \pm 1$$

har asymptoter

$$y - q = \pm \frac{b}{a}(x-p)$$

når $x \to \pm\infty$.





Focus of parabola
and hyperbola
F
Hyperbolic mirror
F′
Parabolic mirror