MAT 1110, 11. februar 2022

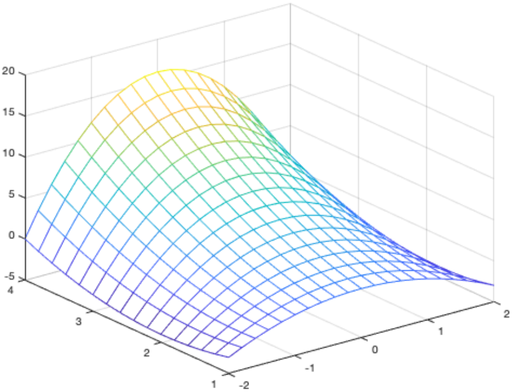
$*$ Parametriserte flater

Arne B. Sletsjøe
Universitetet i Oslo

Parametriserte flater i $\mathbb{R}^3$

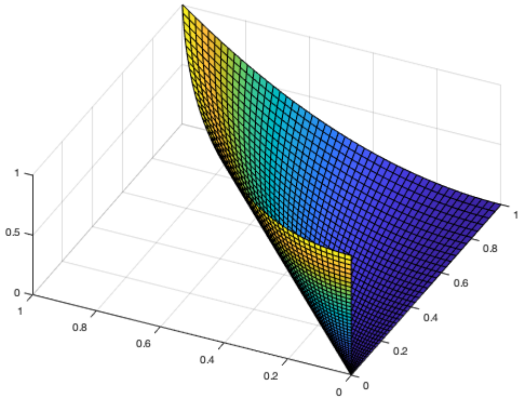
Definisjon

La $A \subset \mathbb{R}^2$. En avbildning $\mathbf{r} : A \to \mathbb{R}^3$ kalles en parametrisert flate.



Eksempel

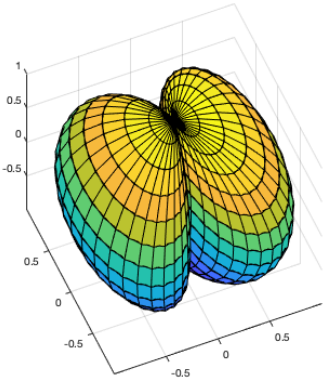
Avbildningen $\mathbf{r}(u, v) = (u^2, uv, v^2)$, *hvor* $0 \le u, v \le 1$ *definerer en parametrisert flate:*



Parametrisering med sfæriske koordinater:

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = (\cos^2\theta \sin\phi, \sin 2\theta \sin\phi, \cos\phi)$$

hvor $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$.

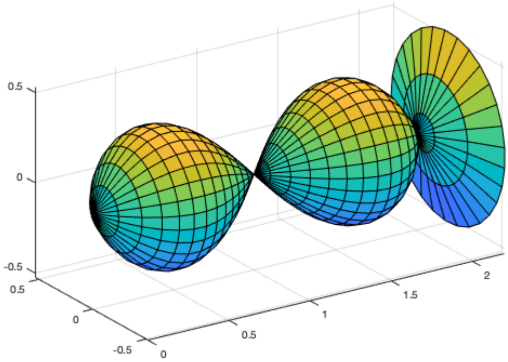


Omdriningslegemer er et eksempel på parametriserte flater:

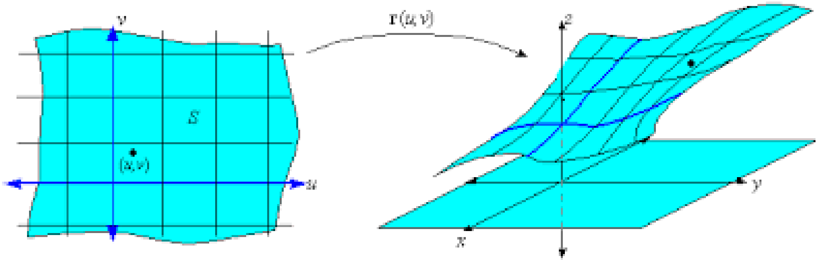
En parametrisert kurve i planet er gitt ved $\gamma(x) = (x, x^3 - 3x^2 + 2x)$ hvor $0 \leq x \leq 3$. Vi kan lage et omdreiningslegeme (hvor vi dreier rundt x-aksen) ved

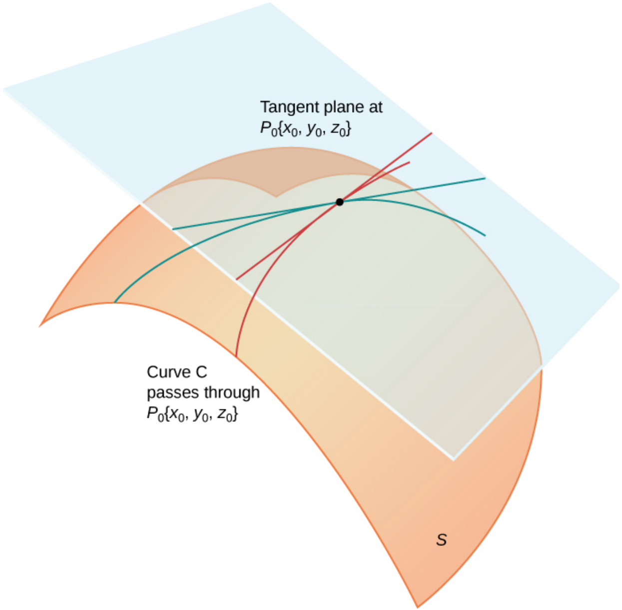
$$\mathbf{r}(x, \theta) = (x, (x^3 - 3x^2 + 2x)\cos\theta, x^3 - 3x^2 + 2x)\sin\theta)$$

hvor $0 \leq x \leq 2.2$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

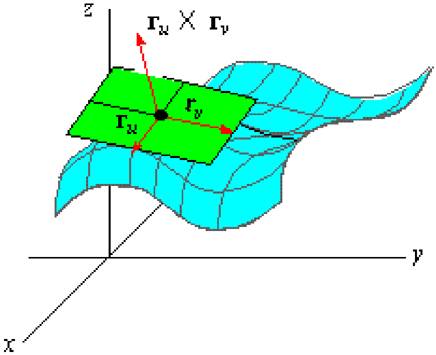


Flatenormal


v
S
(u,v)
u
r(u,v)
z
y
x


Tangent plane at
$P_0\{x_0, y_0, z_0\}$
Curve C
passes through
$P_0\{x_0, y_0, z_0\}$
S

Vektoren $\mathbf{r}'(u, v) = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$ er tangent til flaten og må derfor ligge i tangentplanet.



(Tegningen foregriper hvordan vi kan konstruere en flatenormal)

Gitt to vektorer $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ og $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Vi definerer kryssproduktet $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ved

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2)\mathbf{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Noen egenskaper:

(i) Anti-symmetrisk ($\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$)

(ii) 0 når de to vektorene er lineært avhengig

(iii) Står normal på $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.

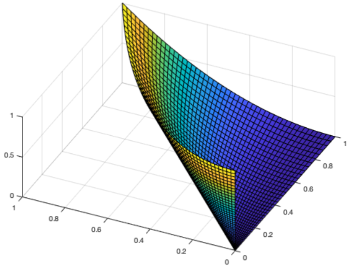
Vi har gitt en parametrisert flate $\mathbf{r}(u, v) = (r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v))$. En **normalvektor** til flaten er gitt ved

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$$

hvor vi bruker notasjonen $\mathbf{r}_u = (\frac{\partial r_1}{\partial u}, \frac{\partial r_2}{\partial u}, \frac{\partial r_3}{\partial u})$ og tilsvarende for $\mathbf{r}_v$.

Eksempel

Parametrisert flate: $\mathbf{r}(u,v) = (u^2, uv, v^2)$, *hvor* $0 \le u, v \le 1$



$$\mathbf{r}_u = (2u, v, 0), \quad \mathbf{r}_v = (0, u, 2v)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & v & 0 \\ 0 & u & 2v \end{vmatrix} = 2v^2\mathbf{i} - 4uv\mathbf{j} + 2u^2\mathbf{k}$$

Eksempel

Parametrisert flate $\mathbf{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$ *for en deriverbar funksjon* f. *Det gir*

$$\mathbf{r}_x = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y})$$

og

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Eksempel

Tangentplanet i punktet $\mathbf{v} = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ *er gitt ved*

$$((x, y, z) - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = 0$$

som skrevet ut gir

$$\begin{aligned} ((x, y, z) - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} &= (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)) \cdot (-\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ &= -(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x} - (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y} + z - f(x_0, y_0) = 0 \end{aligned}$$

dvs.

$$z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Eksempel

Vi skal produsere en vare med to innsatsfaktorer, arbeidskraft x og kapital y. Vi har følgende modell:

(i) *Med en bestemt kapitalinnsats y_0 er produksjonen proporsjonal med arbeidskraften; $P(x, y_0) = ax$*

(ii) *Økning av kapitalinnsats øker effektiviteten av arbeidskraften, $a = a(y) = a_0 + be^{-y}$.*

(iii) *Effekten av økt kapitalinnsats er avtagende, $P(x_0, y) \approx c\sqrt{y}$ (tilnærmet fordi vi ser bort fra effekten økt kapitalinnsats har på effektiviteten av arbeidsinnsatsen)*

(iv) *Produksjonskostnadene er gitt ved $K(x, y) = qx + y$.*

Dette gir fortjeneste uttrykt ved

$$F(x,y) = P(x,y) - K(x,y) = (a_0 + be^{-y})x\sqrt{y} - (qx + y)$$

Eksempel

Fortjenesten er gitt ved en parametrisert flate

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, F(x, y))$$

Vi kan regne ut normalvektoren til flaten

$$\mathbf{n}(x, y) = -\frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Projeksjonen av denne vektoren ned i (x, y)*-planet forteller oss hvilken kombinasjon av de to innsatsfaktorene som vil gis oss størst effekt på fortjenesten.*

Projeksjonen finner vi ved å droppe z-koordinaten.

Oppgave (3.9.3)

En parametrisering av den delen av sylinderflaten $x^2 + y^2 = 1$ *som ligger mellom* $z = 0$ *og* $z = 1$.

Sylinderkoordinater: $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $z = z$.

$$\mathbf{r}(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z), \qquad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 1$$

Oppgave (3.9.7)

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + 2\cos v\mathbf{j} + 2\sin v\mathbf{k}$$

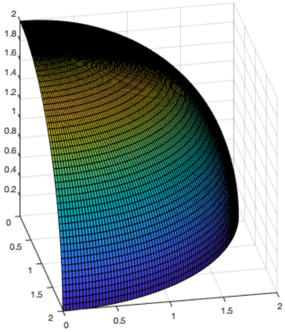
der $0 \leq u \leq 2$, $0 \leq v < 2\pi$.

Parametriseringen beskriver en liggende sylinder med radius 2 og høyde 2.

Oppgave (3.9.9)

Kuleflaten med radius 2 i 1. oktant;

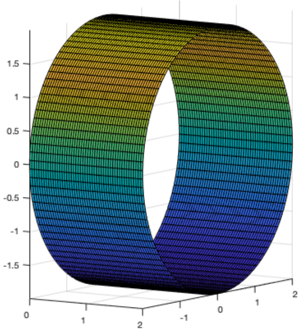
```
u=linspace(0,pi/2,50);
v=linspace(0,pi/2,100);
[U, V]=meshgrid(u,v);
x=2*sin(U).*cos(V);
y=2*sin(U).*sin(V);
z=2*cos(U);
surf(x,y,z)
axis('equal')
```



Oppgave (3.9.10)

Sylinderen i oppg. 7;

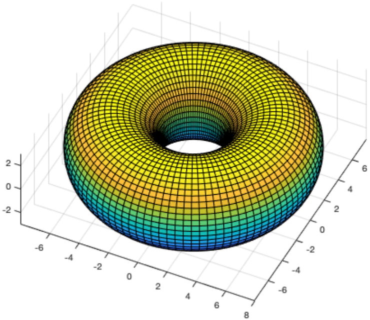
```
u=linspace(0,2,50);
v=linspace(0,2*pi,100);
[U, V]=meshgrid(u,v);
x=u;
y=2*cos(V);
z=2*sin(V);
surf(x,y,z)
axis('equal')
```



Oppgave (3.9.14)

Torus med $r = 3$ *og* $R = 5$;

```
u=linspace(0,2*pi,50);
v=linspace(0,2*pi,100);
[U, V]=meshgrid(u,v);
x=(5+3*cos(U)).*cos(V);
y=(5+3*cos(U)).*sin(V);
z=3*sin(U);
surf(x,y,z)
axis('equal')
```



Litt differensialgeometri

Anta at vi har gitt en parametrisert flate $\mathbf{r}(u, v)$. Definer følgende størrelser:

$$E = ||\mathbf{r}_u||^2, \quad F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v, \quad G = ||\mathbf{r}_v||^2$$

og

$$L = \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{n}, \quad M = \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{n}, \quad N = \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{n},$$

Disse størrelsene kan brukes til mange beregninger på flaten, f.eks.

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{EG - F^2}$$

Hovedkrumningene til en flate i et punkt: κ_1 og κ_2 er de to retningene hvor flaten krummer mest og minst.

Middelkrumningen $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ til flaten $\mathcal{S}$ er gitt ved

$$H = \frac{1}{2}\frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}$$

En flate kalles en **minimalflate** dersom middelkrumningen $H = 0$ overalt.
Gausskrumningen $K = \kappa_1\kappa_2$ til flaten er gitt ved

$$K = \frac{1}{2}\frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

Hovedkrumningene til en flate i et punkt: κ_1 og κ_2 er de to retningene hvor flaten krummer mest og minst.

Setning (Gauss-Bonnet-teorem)

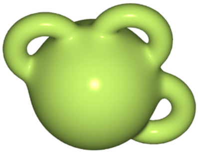
Anta at S er en lukket, glatt parametrisert flate. La $K = K(u, v)$ betegne Gausskrumningen til flaten i punktet gitt ved parametrene (u, v). Da har vi

$$\int_S K \, dA = 2\pi\chi(S)$$

hvor $\chi(S)$ er **Euler-karakteristikken** *til S. Euler-karakkterstikken til en lukket plate er $2 - 2g$ hvor g er antall hull:*

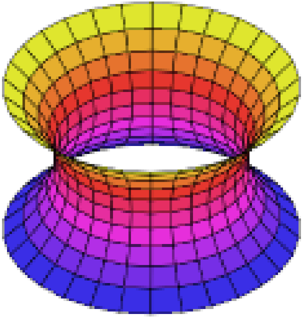
$g = 1$

$g = 2$



$g = 3$

Et kuleskall har ingen hull, derfor er $g = 0$ og $\chi = 2 - 2 \cdot 0 = 2$. Gauss-Bonnet-teoremet gir da at integralet av krumningen er $2\pi\chi = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$. Dette svarer til at for et kuleskall med radius 1, så er Gauss-krumningen 1 overalt. Hvis vi integrerer 1 over et kuleskall med radius 1, får vi 4π.



Katanoide (minimalflate)