MAT 1110, 14. februar 2022

$\ast$ Lineære likningssystemer
Matriser på trappeform

Arne B. Sletsjøe
Universitetet i Oslo

Motivasjon

Gitt et lineært likningssytem

$$2x - y = 3$$
$$x + 3y = 4$$

Fra den første likningen løser vi ut $y = 2x - 3$ som vi setter inn i den andre;

$$x + 3y = x + 3(2x - 3) = x + 6x - 9 = 7x - 9 = 4 \quad \Rightarrow \quad 7x = 13$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{13}{7},\ y = \frac{5}{7}$$

Alternativt, bytt om likningene:

$$\begin{aligned} x + 3y &= 4 \\ 2x - y &= 3 \end{aligned}$$

legg -2 ganger første likning til den andre (og behold den første):

$$\begin{aligned} x + 3y &= 4 \\ -7y &= -5 \end{aligned}$$

del så den andre likningen på -7:

$$\begin{aligned} x + 3y &= 4 \\ y &= \frac{5}{7} \end{aligned}$$

$$x + 3y = 4$$
$$y = \frac{5}{7}$$

Legg -3 ganger andre likning til den første (og behold den andre)

$$x = 4 - 3\frac{5}{7} = \frac{13}{7}$$
$$y = \frac{5}{7}$$

Hvilket likningssytem er enklest å løse?

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ x + 3y &= 4 \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} x + 3y &= 4 \\ y &= \frac{5}{7} \end{aligned}$$

Gauss-eliminasjon

Definisjon

For et likningsystem definerer vi 3 **elementære radoperasjoner***:*

(i) *Bytt om to likninger*

(ii) *Multipliser en likning med et reelt tall forskjellig fra 0*

(iii) *Legg et multiplum av en likning til en annen likning*

Setning

Elementære radoperasjoner endrer ikke løsningsmengden til likningssystemet

Bevis.

La L_i, $i = 1, 2, \dots n$ være likningene i likningssystemet $\mathcal{L}$.

(i) Opplagt

(ii) Dersom $L_i(\mathbf{x}) = 0$ så vil også $(cL_i)(\mathbf{x}) = c \cdot L_i(\mathbf{x}) = c \cdot 0 = 0$

(iii) La L_i og L_j være to likninger i systemet $\mathcal{L}$ og anta at $\mathbf{x}$ er en løsning av likningssytstemet, dvs. $L_i(\mathbf{x}) = L_j(\mathbf{x}) = 0$. Men da vil

$$(L_i + cL_j)(\mathbf{x}) = L_i(\mathbf{x}) + cL_j(\mathbf{x}) = 0 + c \cdot 0 = 0$$

Siden operasjonen $L_i - cL_j$ gir oss det opprinnelige likningssystemet tilbake vil løsningsmengden for de to systemene være den samme.

$\square$

Setning

Elementære radoperasjoner kan alltid bringe et likningssystem over på trappeform.

Bevis.

1. Sørg for at den første likningen har ikke-null koeffisient lengst til venstre i systemet.

2. Legg den første likningen til de andre likningene for å fjerne den lengst-til-venstre koeffisienten i de andre likningene

3. La første likning være og gjenta punkt 1 og 2 med det resterende likningssystemet □

Et eksempel på Gauss-eliminasjon:

$$\begin{aligned} 2y + z &= -1 \\ 3x + 5y + z &= 2 \\ x + 2y + z &= 1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{I} \leftrightarrow \mathbf{III}$$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ 3x + 5y + z &= 2 \\ 2y + z &= -1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{II} - 3 \cdot \mathbf{I}$$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ -y - 2z &= -1 \\ 2y + z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ -y - 2z &= -1 \\ 2y + z &= -1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{III} + 2 \cdot \mathbf{II}$$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ -y - 2z &= -1 \\ -3z &= -3 \end{aligned}$$

$$\frac{-1}{3}\mathbf{III}$$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ -y - 2z &= -1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ -y - 2z &= -1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

$\mathbf{II} + 2 \cdot \mathbf{III}$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ -y \phantom{{}+z} &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

$\mathbf{I} + 2 \cdot \mathbf{II}$

$$\begin{aligned} x \phantom{{}+2y} + z &= 3 \\ -y \phantom{{}+z} &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \qquad\quad + z &= 3 \\ -y \qquad &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{I} - \cdot\mathbf{III}$$

$$\begin{aligned} x \qquad\qquad &= 2 \\ -y \qquad &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

$$-\mathbf{II}$$

$$\begin{aligned} x \qquad\qquad &= 2 \\ y \qquad &= -1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Fra likninger til matriser

Gitt et likningssystem

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\qquad
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m
\end{pmatrix}
$$

Koeffisientmatrisen **Den utvidede koeffisientmatrisen**

Det er en 1-1-korrespondanse mellom lineære likningssystemer og utvidede koeffisientmatriser. Det betyr at alle begreper vi har for likningssystemer også har sin parallell for tilsvarende matriser.

Likningssystem:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ x + 3y &= 4 \end{aligned}$$

Utvidet koeffisientmatrise:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Definisjon

For en matrise definerer vi 3 **elementære radoperasjoner***:*

(i) *Bytt om to rader*

(ii) *Multipliser en rad med et reelt tall forskjellig fra 0*

(iii) *Legg et multiplum av en rad til en annen rad*

Definisjon

Vi sier at to $m \times n$-matriser A, B er **radekvivalente** *dersom det finnes en sekvens av radoperasjoner som forvandler A til B. Vi skriver $A \sim B$ når A og B er radekvivalente.*

Definisjon

En matrise er på **trappeform** *dersom*

(i) *Enhver rad betsår enten bare av nuller, eller så er det første ikke-null elementet et 1-tall.*

(ii) *Enhver rad som ikke bare betsår av nuller, begynner med minst en null mer enn raden over.*

Mer at når vi sier første element i en rad, så mener vi elementet lengst til venstre i raden.

Eksempel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

To matriser på trappeform.

Eksempel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

To matriser på **redusert** *trappeform.*

Setning

Til enhver matrise A finnes en matrise B på trappeform slik at $A \sim B$.

Vi kan uttrykke de elementære radoperasjonene for en matrise ved å multiplisere matrisen fra venstre med **elementære matriser**.

Definisjon

Følgende kvadratiske matriser kalles **elementære** *matriser:*

(i) *Permutasjons- (transposisjons-)matriser, f.eks.*

$$E_\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) *Multiplkasjon*

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii)

$$E_{2,3,C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et eksempel på Gauss-eliminasjon for matriser:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{III} + \mathbf{II}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I} - 2 \cdot \mathbf{II}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I} \leftrightarrow \mathbf{II}, \mathbf{II} \leftrightarrow \mathbf{III}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{-1}{2}\mathbf{III}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{II} - \mathbf{III}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{5}\mathrm{II}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Merk at trappeformer ikke er entydig. I tilsvarende eksempel i boka ender vi opp med

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

men de to matrisene er radekvivalente gjennom

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definisjon

De **ledende 1-erne** *i en matrise på trappeform kalles* **pivotelementer** *og deres søyler kalles* **pivotsøyler***.*

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & 2 & \color{green}{0} & \color{green}{0} & 3 \\ \color{green}{0} & 0 & \color{red}{1} & \color{green}{0} & 0 \\ \color{green}{0} & 0 & \color{green}{0} & \color{red}{1} & 3 \end{pmatrix}$$

Ledende 1-ere markert i rødt, resten av pivotsøylene markert i grønt.

Dersom alle pivotsøylene kun inneholder den ledende 1-eren, og ellers bare 0-er, sier vi at matrisen er på **redusert trappeform**.

På trappeform

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

og på redusert trappeform

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Setning

Ethvert lineært likningssystem har enten 1, ingen eller uendelig mange løsninger.

Eksempel

Vi betrakter et likningssystem i 3 variable; (x, y, z)*. Alle mulige tripler* (x, y, z) *kan vi se på som punkter i* $\mathbb{R}^3$*. En lineær likning skjærer ut et plan. For to lineære likninger har vi 3 muligheter:*

(i) *Planene skjærer hverandre i en rett linje.*

(ii) *Planene er sammenfallende og snittet er fortsatt det samme planet.*

(iii) *Planene er parallelle og skjæringen er den tomme mengden.*

Setning

Anta at den utvidede koeffisientmatrisen til et lineært likningssystem kan radreduseres til trappematrisen C. Da har vi

(i) *Dersom den siste søylen i C er en pivotsøyle, har likningssystemet ingen løsninger.*

Dersom den siste søylen ikke er en pivotsøyle, har vi videre:

(ii) *Dersom alle de andre søylene i C er pivotsøyler, har likningssystemet nøyaktig en løsning.*

(iii) *Dersom minst en av de andre søylene ikke er en pivotsøyle har likningssystemet uendelig mange løsninger.*

Eksempel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Uendelig mange løsninger

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ingen løsninger

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nøyaktig en løsning

Setning

Anta at

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kan reduseres til trappematrisen D. Da har likningssystemet

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

en løsning for alle valg av $b_1, b_2, \dots, b_n$ hvis og bare hvis alle radene i D inneholder pivotelementer.

Dersom også alle søylene i D inneholder pivotelementer, vil løsningen være entydig.

Setning

Likningssystemet

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

har entydig løsning for alle valg av $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *hvis og bare hvis*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$