# MAT 1110, 18. februar 2022

∗ Matriselikninger
inverse matriser


Arne B. Sletsjøe
Universitetet i Oslo

# Matriselikninger

Gitt et likningssystem

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Vi kan skrive dette som

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

Vi kaller

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

og ender opp med en **matriselikning**:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

## Eksempel

*La*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

*og*

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*Vi skal finne* $\mathbf{x}$ *slik at* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Vi skriver opp den utvidede koeffisientmatrisen

$$B = (A, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ved f.eks. å bruke MATLAB-kommandoen: $>> C = rref(B)$ kommer vi fram til

$$C = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0 & 0.6667 & 0.3333 & 0 & 1.2963 \\ 0 & 1.0000 & -1.6667 & -2.3333 & 0 & 1.1481 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & -0.1111 \end{pmatrix}$$

som gir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.6667 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 1 & -1.6667 & -2.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2963 \\ 1.1481 \\ -0.1111 \end{pmatrix}$$

som gir løsning

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2963 \\ 1.1481 \\ 0 \\ 0 \\ -0.1111 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -0.6667 \\ 1.6667 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -0.3333 \\ 2.3333 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### Setning

*La $B = (A, \mathbf{b})$ være den utvidede koeffisientmatrisen til matriselikningen*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

*og anta at $b$ kan radreduseres til trappematrisen $C$. Da har vi*

(i) *Dersom den siste søylen i $C$ er en pivotsøyle, har likningssystemet ingen løsninger.*

*Dersom den siste søylen ikke er en pivotsøyle, har vi videre:*

(ii) *Dersom alle de andre søylene i $C$ er pivotsøyler, har likningssystemet nøyaktig en løsning.*

(iii) *Dersom minst en av de andre søylene ikke er en pivotsøyle har likningssystemet uendelig mange løsninger.*

## Setning

*Anta at matrisen $A$ er radekvivalent med trappematrisen $D$. Da har likningen*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

*løsning for alle vektorer $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ hvis og bare hvis alle radene i $D$ inneholder et pivotelement (ledende 1-er). Løsningen er entydig dersom også alle søylene i $D$ inneholder et pivotelement (som betyr at $A$ er en kvadratisk matrise som er radekvivalent med identitetsmatrisen).*

### Definisjon

*Et likningssystem (eller en matriselikning) kalles* **homogent** *dersom* $\mathbf{b} = \mathbf{0}$*.*
*I motsatt fall er systemet* **inhomogent***.*

Merk: Et homogent likningssystem har alltid en løsning, nemlig $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

## Setning

*Gitt en matriselikning*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

*(som gjerne kan ha uendelig mange løsninger). Plukk ut en løsning* $\mathbf{x}_p$*, hvor indeksen* $p$ *står for* **partikulær***, Finn så* <u>*alle*</u> *løsninger* $\mathbf{x}_h$ *av det homogene systemet*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

*hvor indeksen* $h$ *står for* **homogen***. Da har vi* <u>*alle*</u> *løsningene av det inhomogene systemet gitt ved*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$$

Bevis.

Dersom $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$ har vi

$$A(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h) = A(\mathbf{x}_p) + A(\mathbf{x}_h) = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$$

Dersom vi har en egenerell løsning $\mathbf{x}$, setter vi $\mathbf{x}_h = \mathbf{x} - \mathbf{x}_p$. Da har vi $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$. I tillegg er $\mathbf{x}_h$ løsning av den homogene likningen;

$$A(\mathbf{x}_h) = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{x}_p) = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

$\square$

Hvis vi har flere matriselikninger med samme koeffisientmatrise

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2, \quad \dots \quad , A\mathbf{x} = \mathbf{b}_k$$

kan vi løse disse ved å introdusere matrisen $B$; en matrise med $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ osv. som sine søyler.

# Eksempel

*Vi skal løse (simultant) matriselikningene*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

*for*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

*og*

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*Vi setter*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*og den utvidede koeffisientmatrisen*

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

som vi radreduserer til

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0.6 & 0.8 & 0.6 \\ 0 & 1 & -0.2 & 1.4 & 0.8 \end{array}\right)$$

og vi har løsningene

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.6 \\ -0.2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 1.4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

# Inverse matriser

### Definisjon

*La $A$ være en $n \times n$-matrise (altså kvadratisk). Den* **inverse** *matrisen til $A$; $A^{-1}$ er $n \times n$-matrisen som er slik at $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.*

To spørsmål:

(i) Har alle matriser en invers?

(ii) Hvorfor er inversen den samme fra høyre og fra venstre?

### Definisjon

*La $A$ være en $n \times n$-matrise (altså kvadratisk). Den* **inverse** *matrisen til $A$; $A^{-1}$ er $n \times n$-matrisen som er slik at $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.*

To spørsmål:

(i) Har alle matriser en invers? Nei!

(ii) Hvorfor er inversen den samme fra høyre og fra venstre? (Lemma 4.5.1 og 4.5.2)

Vi holder oss til $2 \times 2$-matriser.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Vi skal finne

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

slik at $AB = I_2$. Multiplisere vi ut

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Så vi må løse likningssystemet

$$\begin{aligned} ax \quad & \quad + bz \quad & &= 1 \\ & ay \quad & + bw &= 0 \\ cx \quad & \quad + dz \quad & &= 0 \\ & cy \quad & + dw &= 1 \end{aligned}$$

Med litt regning finner vi at

$$x = \frac{d}{ad - bc}, \quad y = \frac{-b}{ad - b^2}, \quad z = \frac{-c}{ad - b^2}, \quad w = \frac{a}{ad - b^2}$$

Med andre ord

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

og $AA^{-1} = I_2$. Sjekk dette!. Men nå er det lett å se at $A^{-1}A = I_2$. Sjekk dette også!.

Inverser er faktisk entydige, dvs. vi kan ikke ha to forskjellige matriser $B$ og $B'$ som begge oppfyller

$$AB = I, \qquad AB' = I$$

**Bevis.**
Siden vi vet at $AB = I$ betyr at også $BA = I$ har vi

$$B' = B' \cdot I = B' \cdot (A \cdot B) = (B' \cdot A) \cdot B = I \cdot B = B$$

$\square$

For at en matrise skal være inverterbar må **determinanten** til matrisen være ulik 0.

Sammenhengen mellom løsninger av likningssystemer og inverterbarhet av matriser:

## Setning

*En $n \times n$-matrise $A$ er inverterbar hvis og bare hvis matriselikningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har løsninger for alle $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.*

Hvordan kan vi finne den inverse?

La $A$ være en inverterbar $n \times n$-matrise. Vi skriver opp den utvidede matrisen $(A, I_n)$ Så radreduserer vi til vi kommer fram til $(I_n, B)$. $B$ er da den inverse matrisen til $A$.

Hvorfor?

Vi skriver radoperasjonene som elementære matriser:

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot (A, I_n) = (I_n, B)$$

Det betyr at

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n, \quad E_k \cdot E_{k-1} \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot I_n = B$$

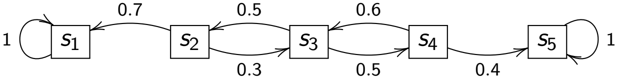
Hvis vi kaller

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 = E$$

har vi

$$I_n = E \cdot A = E \cdot I_n \cdot A = B \cdot A$$

# En anvendelse av matriser



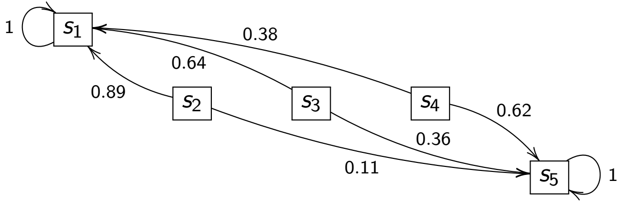

Den tilhørende **overgangsmatrisen** blir

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Denne overgangsmatrisen har en spesiell egenskap, nemlig at summen av tallene i hver kolonne er 1, i tillegg til at ingen av tallene i matrisen er negative. En slik matrise kalles en **stokastisk matrise**. Ser vi på modellen så gjenkjenner vi dette ved at summen av "ut-verdiene" er 1 i alle boksene. Mao ingen ting kommer til eller fjernes fra systemet. Vi kan tenke på tallene i matrisen som sannsynligheter for at man beveger seg mellom de ulike stadiene. Det er grunnen til at vi i dette tilfellet har kalt overgangsmatrisen for $P$, $P$ for probability. Vi kan bruke en datamaskin til å regne ut høye potenser av $P$, og da ser vi noe interessant:

$$P^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 0.89 & 0.64 & 0.38 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.11 & 0.36 & 0.62 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Alt i midten av matrisen blir 0. Vi kan illustrere $P^{100}$ med en figur:




Her har vi gjort det motsatte av det vi startet med å gjøre. Med utgangspunkt i en overgangsmatrise har vi laget en figur som gir oss nøyaktig samme informasjon.

Hvis vi starter med en vektor (tilstand)

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

så vil vi etter 100 skritt ende med

$$\mathbf{v}_{100} = P^{100} \cdot \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 0.89 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.11 \end{pmatrix}$$

Dette kan vi tolke som at dersom vi starter i boks 2, så vil vi i 89% av tilfellene ende opp i boks 1 etter 100 step, og resten i boks 5. Vi ender aldri opp i de tre midterste boksene.

Den inverse til overgangsvektoren $P$ modellerer at vi kjører systemet *baklengs*. Hvis vi har gitt en vektor $\mathbf{v}$ som gir en fordeling mellom boksene, vil $P^{-1}\mathbf{v}$ fortelle hvordan fordelingene var i forrige step.