MAT 1110, 21. februar 2022

$*$ Lineærkombinasjoner
Lineær (u-)avhengighet
Basiser
Underrom

Arne B. Sletsjøe
Universitetet i Oslo

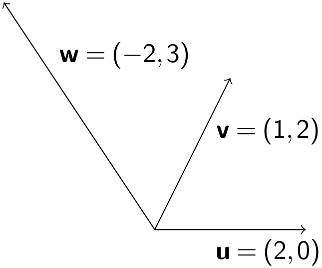
Lineærkombinasjoner

Definisjon

Vi har gitt n vektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$*. En sum*

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

det $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *kalles en* **lineærkombinasjon** *eller en* **lineær kombinasjon** *av elementene* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$*.*



Vi skal skrive $\mathbf{w}$ som en lineærkombinasjon av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.

Vi har

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

og vi skal finne $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ slik at

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Det gir likningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= -2 \\ 2x_2 &= 3 \end{aligned}$$

som har løsning $x_1 = -\frac{7}{4}$ og $x_2 = \frac{3}{2}$

Eksempel

Skriv

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

som en lineærkombinasjon av

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad og \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Det gir likningssytemet

$$\begin{aligned} 3x_1 + 7x_2 &= 1 \\ -x_1 + x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

med utvidet koeffisientmatrise

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

som vi radreduserer til

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

og som gir oss løsningen $x_1 = -2$ og $x_2 = 1$.

Setning

La $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. *For å avgjøre om* $\mathbf{b}$ *kan skrives som en lineærkombinasjon av* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, *radreduserer vi matrisen* $B = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b})$ *til en trappematrise* C. *Da har vi*

(i) *Dersom den siste søylen i* C *er en pivotsøyle, er* $\mathbf{b}$ *ikke en lineærkombinasjon av* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Dersom den siste søylen ikke er en pivotsøyle, har vi videre:

(ii) *Dersom alle de andre søylene i* C *er pivotsøyler, kan vi skrive* $\mathbf{b}$ *som en lineærkombinasjon av* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.

(iii) *Dersom minst en av de andre søylene ikke er en pivotsøyle kan vi skrive* $\mathbf{b}$ *som en lineærkombinasjon av* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *på uendelig mange måter.*

Setning

La $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ *og anta at matrisen* $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$*, kan radreduseres til en trappematrise* C*. Da kan enhver vektor* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ *skrives som en lineærkombinasjon av* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *hvis og bare hvis alle radene i matrisen inneholder et pivotelement.*

Definisjon

La $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$. *Vi definerer* **spennet**

$$Sp(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) = \{x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n \,|\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

av $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *til å være mengden av alle lineærkombinasjoner av mengden.*

Merk. At en mengde av vektorer utspenner hele $\mathbb{R}^m$ betyr at den radreduserte av matrisen $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ har pivotelementer i hver rad.

Setning

For å utspenne hele $\mathbb{R}^m$ *trenger vi minst* m *vektorer.*

Bevis.

Matrisen A er en $m \times n$-matrise og for å ha et pivotelement i hver rad må vi ha minst like mange søyler som rader, dvs. $m \geq n$. □

Eksempel

Vi har

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \in Sp\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

mens

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin Sp\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Lineær (u-)avhengighet, basiser

Definisjon

Vi sier at vektorene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ *danner en* **lineært uavhengig mengde** *dersom et hvert element* $\mathbf{b} \in Sp(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ *kan skrives som en lineærkombinasjon av* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *på en entydig måte. I motsatt fall er mengden* **lineært avhengig**.

Setning

(i) *Vektorene* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ *er* **lineært uavhengig** *dersom*

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

(ii) *Vektorene* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ *er* **lineært uavhengig** *dersom alle søylene i den radreduserte trappematrisen til* $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ *er pivotsøyler.*

Merk. At en mengde av vektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ er lineært uavhengig betyr at den radreduserte av matrisen $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ har pivotelementer i hver søyle.

Setning

En lineært uavhengig mengde i $\mathbb{R}^m$ har m eller færre elementer.

Kombinerer vi dette med en tidligere observasjon:

For å utspenne hele $\mathbb{R}^m$ trenger vi minst m vektorer.

følger

Setning

En lineært uavhengig mengde av vektorer som utspenner hele $\mathbb{R}^m$ må ha nøyaktig m elementer.

Definisjon

En slik mengde kalles en **basis** *for $\mathbb{R}^m$, og antall elementer i mengden definerer* **dimensjonen** *til* $\mathbf{R}^m$.

Setning

Enhver delmengde av ikke-null vektorer i $\mathbb{R}^m$ inneholder en lineært uavhengig delmengde.

Bevis.

La $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ være mengden. Hvis den er lineært uavhengig, så ok. Hvis ikke, så finnes en lineærkombinasjon

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

hvor ikke alle $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Anta $x_1 \neq 0$. Da kan vi skrive

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{1}{x_1}(x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n)$$

og $\mathbf{a_1}$ ligger i

$$\mathrm{Sp}(\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

Gjenta prosessen med $\{\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ og fortsett til den stopper. $\square$

Her er en metode for å finne en lineært uavhengig delmengde:

Eksempel

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vi setter vektorene inn som søylene i en matrise;

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

og lar MATLAB radredusere:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Siden det er 1., 2. og 4. søyle som er pivotsøyler, betyr det at 1., 2. og 4. vektor utgjør en lineært uavhengig mengde, altså

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Definisjon

Elementene

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \mathbf{e}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

kalles **standardbasisen** *for* $\mathbb{R}^5$.

Setning

Vektorene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^m$ *danner en basis for* $\mathbb{R}^m$ *dersom matrisen* $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ *er radekvivalent med identitetsmatrisen.*

(pivotelementer i hver søyle og rad)

Setning

Gitt en mengde av m vektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^m$. *Da er følgende ekvivalent:*

(i) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$ *danner en basis for* $\mathbb{R}^m$.

(ii) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$ *utspenner hele* $\mathbb{R}^m$.

(iii) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$ *er lineært uavhengig.*

Merk. Det følger at enhver lineært uavhengig mengde $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\} \subset \mathbb{R}^m$ hvor $k < m$ kan utvides til en basis for $\mathbb{R}^m$.

En lineæravbildning $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ har en definerende egenskap;

$$T(a\mathbf{x}+b\mathbf{y}) = aT(\mathbf{x})+bT(\mathbf{y})$$

Det betyr at avbildningen er bestemt av verdiene på en basis $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m\}$:

$$T(a_1\mathbf{v}_1+\cdots+a_m\mathbf{v}_m) = a_1T(\mathbf{v}_1)+\cdots+a_mT(\mathbf{v}_m)$$

Setning

La $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ *være en basis for* $\mathbb{R}^m$ *og la* $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m \in \mathbb{R}^n$. *Da finnes det nøyaktig en lineæravbildning slik at*

$$T(\mathbf{v}_j) = \mathbf{b}_j \qquad \textit{for alle } j = 1, 2, \ldots, m$$

Bevis.

1. Definer avbildningen ved

$$T(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_m\mathbf{v}_m) = a_1 T(\mathbf{v}_1) + \cdots + a_m T(\mathbf{v}_m)$$

2. Vis at dette er en lineæravbildning, dvs. $T(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = aT(\mathbf{x}) + bT(\mathbf{y})$.
3. Entydigheten følger av definisjonen.

$\square$

Underrom

Et underrom V av $\mathbb{R}^m$ er en delmengde av $\mathbb{R}^m$ som selv er et vektorrom. Det innebærer:

Definisjon

Et vektorrom V er en mengde som er slik at dersom $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ og $a, b \in \mathbb{R}$, så er lineærkombinasjonen $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \in V$.

Noen egenskaper for vektorrom:

(i) Lukket under addisjon

(ii) Lukket under skalar multiplikasjon

(iii) Inneholder $\mathbf{0}$ og additive inverser.

(iv) $\mathbb{R}^m$ er et vektorrom for alle $m \geq 1$

(v) Mengden av alle funksjoner er et vektorrom

Ethvert underrom $V \neq 0$ av $\mathbb{R}^m$, har en basis, dvs. en mengde $\mathscr{V} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ slik at

(i) $\mathscr{V}$ spenner V, altså $V = \mathrm{Sp}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$.

(ii) $\mathscr{V}$ er lineært uavhengig.

Eksempel

$$Sp\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}\right)$$

er et underrom i $\mathbb{R}^3$.

Setning

Alle basiser for et underrom V av $\mathbb{R}^m$ har like mange elementer.

Dette antallet, d, kalles **dimensjonen** til V, vi skriver $d = \dim V$.

Bevis.

Anta at vi har to basiser $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ og $\mathscr{B}'$ med p og q elementer, der $p < q$. Velg et element $\mathbf{w}_1$ i $\mathscr{B}'$. Siden $\mathscr{B}$ er en basis må vi ha

$$\mathbf{w}_1 = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_p\mathbf{v}_p$$

for reelle tall $a_1, \ldots, a_p$, ikke alle lik 0. Anta at $a_1 \neq 0$. Da kan vi skrive

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{a_1}(\mathbf{w} - a_2\mathbf{v}_2 - \cdots - a_p\mathbf{v}_p)$$

og $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ danner en ny basis (lineært uavhengig og utspenner). Gjenta prosessen p ganger, da har vi fått en ny basis som består av de p første elementene i $\mathscr{B}'$. Men da må de resterende elementene være lineærkombinasjoner av de p første, som motsier påstanden om at $p < q$. $\square$

Vi gjør følgende observasjoner:

(i) Antall lineært uavhengige søyler er det samme i to radekvivalente matriser.

(ii) Radrommet endrer seg ikke ved radoperasjoner

(iii) Dimensjonen til radrommet, såvel som dimensjonen til søylerommet er lik antall pivotelementer.

(iv) Dimensjonen i (iii) kalles **rangen** til matrisen.

De mest håndterlige basisene er de ortonormale basisene.

Definisjon

En basis $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ *er* **ortonormal** *dersom*

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0 \textit{ for } i \neq j \textit{ og } \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = 1$$

Setning

La $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ *være en ortonormal basis for et underrom* V *av* $\mathbb{R}^m$*, og la* $\mathbf{w} \in V$*. Da har vi*

$$\mathbf{W} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_p)\mathbf{v}_p$$

Eksempel

La

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

Mengden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ *danner en ortonormal basis for* $\mathbb{R}^2$*. Vi beregner enkelt at*

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{v}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{v}_2$$