MAT 1110, 25. februar 2022

∗ Elementære matriser
∗ Determinanter

Arne B. Sletsjøe
Universitetet i Oslo

Elementære matriser

Definisjon

(i) *Permutasjons- (transposisjons-)matriser, bytter om to rader*

$$E_\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) *Multiplikasjon av en rad med et tall*

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) *Legge et multiplum av en rad til en annen rad*

$$E_{(II + C \cdot IV)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elementære matriser samsvarer med tilsvarende elementære radoperasjoner.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ x - 6y &= -3 \end{aligned}$$

Bytter om likningene:

$$\begin{aligned} x - 6y &= -3 \\ 2x + 3y &= 4 \end{aligned}$$

svarer til

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Setning

Elementære matriser er inverterbare ,og den inverse av en elementær matrise er selv en elementær matrise;

$$E_\rho \cdot E_\rho = I$$
$$E_k \cdot E_{\frac{1}{k}} = I$$
$$E_{(II+C\cdot IV)} \cdot E_{(II-C\cdot IV)} = I$$

Eksempel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -C & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Setning

Enhver $m \times n$-matrise A kan skrives som et produkt

$$A = E_1 E_2 \dots E_r B$$

der $E_1, E_2, \dots, E_r$ er elementære matriser og B er den reduserte trappeformen til A.

Dersom A er inverterbar, og kvadratisk, har vi $B = I$, og vi kan skrive A som et produkt av elementære matriser.

$$A = E_1 E_2 \dots E_r$$

Setning

Den transponerte av en elementær matrise er elementær.

$$E_p^T = E_p$$
$$E_k^T = E_k$$
$$(E_{(II+C\cdot IV)})^T = E_{(IV+C\cdot II)}$$

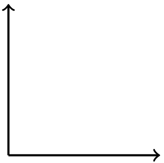
- Transponering bytter søyler og rader
- Symmetriske matriser er lik sin transponerte

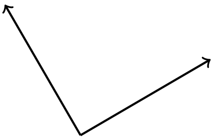
Rotasjon med en vinkel $\theta = \frac{\pi}{6}$ er gitt ved **rotasjonsmatrisen**

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

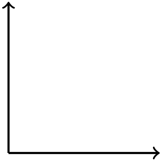
Vi har:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

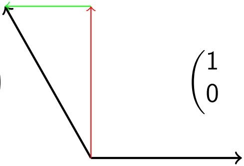




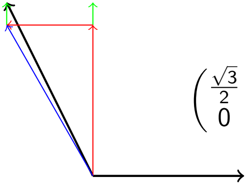
En rotasjon som et produkt av elementære matriser:



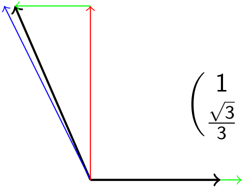
$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



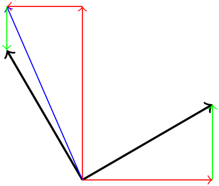
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

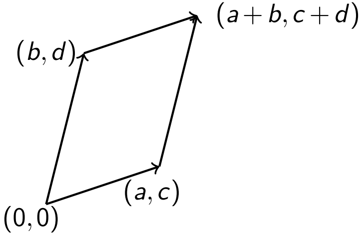


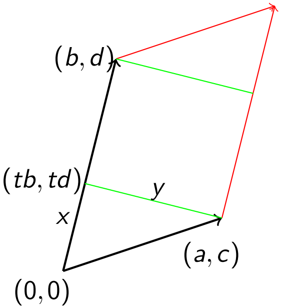
Determinanter

Hverdagslige betraktninger rundt determinanter

La A være en $n \times n$-matrise. Determinanten til A, $\det(A)$ er et tall som for mange formål avgjør hvilke egenskaper matrisen har. Men siden matrisen består av n^2 tall, og determinanten bare 1, er det begrenset hvor mye determinanten kan uttale seg om matrisen. Men vi kan også la oss imponere av styrken til det enslige tallet $\det(A)$, som på tross av sin tallmessige underlegenhet vet veldig mye om A.

Eksempel på bruk av determinant, areal av et parallellogram:





$$((a,c)-(tb,td))\cdot(b,d)=0 \quad \Rightarrow \quad x = t\sqrt{b^2+d^2}\,\frac{ab+cd}{\sqrt{b^2+d^2}}$$

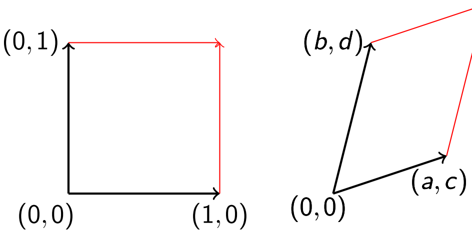
$$X^2+y^2=a^2+c^2 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{ad-bc}{\sqrt{b^2+d^2}}$$

Areal av parallellogrammet: $y\cdot\sqrt{b^2+d^2}=ad-bc=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være en lineæravbildning gitt ved

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

og betrakt et parallellogram (se figur)



Hjørnene i parallellogrammet er gitt ved $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, og arealet av dette parallellogrammet har vi akkurat regnet ut.
Siden arealet av enhetskvadratet er 1, kan det være nærliggende å betrakte determinanten til en lineæravbildning som en **forstørrelsesfaktor**.

Definisjon

En **permutasjonsmatrise** *er en kvadratisk matrise hvor hver søyle og rad betsår av ett 1-tall og resten 0-er.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fortegnet til en permutasjonsmatrise er gitt som -1 opphøyde i antallet elementære transposisjonsmatriser som trengs for å lage A. Dette tallet kan variere, alt etter valgt framgangsmåte, men en setning sier det er uavhengig av valg av elementære matriser om tallet er et partall eller et oddetall.

I eksemplet over kan vi komme fram til identitetsmatrisen ved følgende rekke av transposisjoner:

$$1 \leftrightarrow 5, \quad 2 \leftrightarrow 4, \quad 4 \leftrightarrow 5$$

$$4 \leftrightarrow 5, \quad 3 \leftrightarrow 4, \quad 2 \leftrightarrow 3, \quad 1 \leftrightarrow 2, \quad 3 \leftrightarrow 4$$

Definisjon

La A være en $n \times n$-matrise. Da er determinanten til A definert som summen av alle mulige kombinasjoner av å plukke ett element fra hver søyle og hver rad, og sette tegnet til den tilsvarende permutasjonsmatrisen foran.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \color{red}{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \color{red}{a_{23}} \\ \color{red}{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \color{red}{1} & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} \\ \color{red}{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Setning

(i) *For en øvre (eller nedre) triangulær matrise er determinanten lik produktet av elementene på diagonalen.*

(ii) *Dersom vi bytter om to rader i en matrise multipliserer dette determinanten med -1.*

(iii) *Dersom vi multipliserer en rad (eller søyle) med et tall k vil også determinanten bli multiplisert med k.*

(iv) *Dersom vi legger et multiplum av en rad til en annen vil ikke determinanten endres.*

Setning

(v) *Vi har*

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(vi) *For en $n \times n$-matrise A og et reelt tall k har vi*

$$\det(kA) = k^n \det(A)$$

(vii) *Anta at en kvadratisk matrise A inneholder en hel rad eller en hel søyle av 0-er. Da er $\det(A) = 0$.*

(viii) *Determinantene til en matrise og dens transponerte er like.*

Setning

En $n \times n$-matrise A er inverterbar hvis og bare hvis $\det(A) \neq 0$.

Bevis.

Vi kan skrive

$$A = E_k E_{k-1} \dots E_1 B$$

hvor $E_1, \dots, E_k$ er elementære matriser og B er den reduserte trappematrisen til A. Dersom A er inverterbar så er $B = I$ og radoperasjonene endrer determinanten fra 1 til et annet tall $\neq 0$. $\square$

Definisjon

Determinantene til de **elementære** *matrisene:*

(i)

$$\det(E_\rho) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

(ii)

$$\det(E_k) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = k$$

(iii)

$$\det(E_{(II+C\cdot IV)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Observer at determinantene til de elementære matrisene og de tilsvarende determinantene til de multipliserte matrisene er kosistente:

(i) Bytte om to rader i en matrise multipliserer determinanten med -1, og $\det(E_\rho) = -1$.

(ii) Multiplikasjon en rad (eller søyle) med et tall $k$multipliserer determinanten med k, og $\det(E_k) = k$.

(iii) Legge et multiplum av en rad til en annen endrer ikke determinanten, og $\det(E_{(II+C\cdot IV)}) = 1$.

Setning

For en kvadratisk matrise A og en elementær matrise E har vi

$$\det(EA) = \det(E) \cdot \det(A)$$

Setning

Anta A og B er to $n \times n$-matriser, slik at A ikke er inverterbar. Da er heller ikke produktet $C = AB$ inverterbart.

Bevis.

Siden A ikke er inverterbar finnes det en vektor $\mathbf{b}$ slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikke har noen løsning. Hvis nå $C\mathbf{y} = AB\mathbf{y} = \mathbf{b}$ er en løsning, så vil $\mathbf{x} = B\mathbf{y}$ være en løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Men det gir en motsigelse og vi kan konkludere med at $C\mathbf{y} = \mathbf{b}$ ikke har noen løsning, □

Produktformelen for determinanter, en svært viktig setning:

Setning

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Setning

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Bevis.

Resultatet følger direkte fra å ta determinanten til produktet $A \cdot A^{-1} = I$. $\square$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$(1\ 2) \quad \color{red}{(2\ 1)}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$(1\ 2\ 3) \quad \color{red}{(2\ 1\ 3)} \quad \color{red}{(1\ 3\ 2)} \quad (2\ 3\ 1) \quad \color{red}{(3\ 2\ 1)} \quad (3\ 1\ 2)$$

Hvordan kan vi finne den inverse?

La A være en inverterbar $n \times n$-matrise. Vi skriver opp den utvidede matrisen (A, I_n) Så radreduserer vi til vi kommer fram til (I_n, B). B er da den inverse matrisen til A.

Hvorfor?

Vi skriver radoperasjonene som elementære matriser:

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot (A, I_n) = (I_n, B)$$

Det betyr at

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n, \quad E_k \cdot E_{k-1} \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot I_n = B$$

Hvis vi kaller

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 = E$$

har vi

$$I_n = E \cdot A = E \cdot I_n \cdot A = B \cdot A$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{2+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -(3 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1)) + 2(2 \cdot 2 - (-1) \cdot 0) - 3(2 \cdot (-1) - 3 \cdot 0)$$

$$= -5 + 8 + 6 = 9$$

Alternativt:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= 2\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot 3\cdot 0 + (-1)\cdot 1\cdot (-1) \\ &\qquad - (-1)\cdot 2\cdot 0 - 2\cdot 3\cdot (-1) - 3\cdot 1\cdot 2 \\ &= 8 + 0 + 1 - 0 + 6 - 6 \\ &= 9 \end{aligned}$$