MAT 1110, 28. februar 2022

∗ Egenverdier og -vektorer
∗ Spektralteoremet for symmetriske matriser

Arne B. Sletsjøe
Universitetet i Oslo

Egenverdier og -vektorer

Definisjon

Gitt en kvadratisk $n \times n$*-matrise* A*. En vektor* $\mathbf{v} \neq 0$ *kalles en* **egenvektor** *for* A *dersom*

$$A \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$$

for et reelt tall λ*. Tallet* λ *kalles for den tilhørende* **egenverdien**.

Anta at $\mathbf{v}$ er en egenvektor for en matrise A, med tilhørende egenverdi λ. Da har vi

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

Alternativt kan vi skrive denne likningen som

$$\lambda\mathbf{v} - A\mathbf{v} = (\lambda I - A)\mathbf{v} = 0$$

Egenvektorer er alltid antatt å være forskjellige fra 0-vektoren. Det betyr at likningssytemet $(\lambda I - A)\mathbf{v} = 0$ skal ha en ikke-triviell løsning. Siden dette er et homogent likningsystem er det ekvivalent med at determinanten til koeffisientmatrisen er lik 0. Vi betrakter λ som en ukjent og prøver å finne en løsning av likningen

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Dersom vi skriver dette ut ser vi at dette gir oss en polynomial likning i λ.

Definisjon

La A være en kvadratisk matrise, og la λ være en ukjent størrelse. Polynomet

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

kalles det **karakteristiske polynomet** *til matrisen A, og røttene til polynomet er egenverdiene til matrisen.*

En $n \times n$-matrise kan ha inntil n egenverdier. Disse kan være forskjellige eller noen av dem kan være sammenfallende.

Definisjon

La A være en kvadratisk matrise; Da er **trasen** *(også kalt* **sporet***) til A gitt som summen av diagonal-elementene*

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

For en 2×2-matrise er det enkelt å se at det karakteristiske polynomet kan skrives

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A)$$

Det faller direkte ut dersom vi skriver ut det karakteristiske polynomet på elementform. Vi har

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) \end{aligned}$$

Eksempel

Vi skal beregne egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi har $tr(A) = 2$ *og* $\det(A) = -3$. *Det gir karakteristisk polynom*

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

For å finne røttene bruker vi abc-formelen;

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-3)}}{2} = 1 \pm 2$$

Egenverdiene blir $\lambda_1 = 3$ *og* $\lambda_2 = -1$.

Eksempel

Vi skal regne ut det karakteristiske polynomet til

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi har

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda - 1 & 2 \\ -1 & -1 & \lambda - 0 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)^2\lambda + 2(\lambda - 1) + 2(\lambda - 1) \\ &= \lambda^3 - 2\lambda^2 + 5\lambda - 4 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda + 4) = 0 \end{aligned}$$

gir $\lambda = 1$ *eller*

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 16}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{15}}{2}$$

Eksempel

Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

har karakteristisk oplynom

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

som gir kun en egenverdi $\lambda = 1$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

gir $x = y$, *og vi har kun en egenvektor*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Setning

La A være en invertibel $n \times n$-matrise, og $\mathbf{v}$ en egenvektor med tilhørende egenverdi λ. Da er $\mathbf{v}$ også egenvektor for A^{-1} med egenverdi $\frac{1}{\lambda}$.

Bevis.

Vi har $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Siden A er invertibel kan vi multiplisere med A^{-1} på begge sider av likhetstegnet, og vi får $\mathbf{v} = A^{-1}\lambda\mathbf{v}$. Deler vi begge sider med λ får vi

$$A^{-1}\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{v}$$

□

Setning

En kvadratisk matrise og dens transponerte har de samme egenverdiene.

Merk at de to matrisene har samme egenverdier, vi sier ikke noe om egenvektorene.

Bevis.

Siden en matrise og dens transponerte har samme determinant følger det at

$$\begin{aligned}\chi_{A^T}(\lambda) &= \det(\lambda I - A^T)\\ &= \det(\lambda I - A^T)^T\\ &= \det(\lambda I^T - A)\\ &= \det(\lambda I - A) = \chi_A(\lambda)\end{aligned}$$

□

Setning

La A være en $n \times n$-matrise. La videre $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ være egenvektorer for A svarende til ulike egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Da er mengden

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$$

lineært uavhengig.

Bevis.

La først $r = 2$, og anta at $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Anta at det finnes en lineær avhengighet mellom de to vektorene, anta f.eks at $a_1 \neq 0$. Da kan vi skrive

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{a_2}{a_1}\mathbf{v}_2$$

og siden $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ begge er egenvektorer får vi

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1 = -\frac{a_2}{a_1}\lambda_1\mathbf{v}_2$$

og samtidig

$$A\mathbf{v}_1 = A(-\frac{a_2}{a_1}\mathbf{v}_2) = -\frac{a_2}{a_1}A\mathbf{v}_2 = -\frac{a_2}{a_1}\lambda_2\mathbf{v}_2$$

Det følger at

$$-\frac{a_2}{a_1}\lambda_1 = -\frac{a_2}{a_1}\lambda_2$$

og siden $\lambda_1 \neq \lambda_2$ så må $a_2 = 0$. Siden $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ følger det at også $a_1 = 0$, som gir oss en motsetning. $\square$

Bevis.

Anta så at $r = 3$ og at vi har en lineær avhengighet

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

Vi kan uten videre anta at $a_1 \neq 0$ og ved å dele likningen på a_1 kan vi like godt sette a_1 til å være 1. Det gir

$$\mathbf{v}_1 = -a_2\mathbf{v}_2 - a_3\mathbf{v}_3$$

Bruker vi nå T på dette uttrykket får vi

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 = -a_2\lambda_2\mathbf{v}_2 - a_3\lambda_3\mathbf{v}_3$$

Vi multipliserer uttrykket over med λ_1 og trekker de to likningene fra hverandre. Det gir

$$\mathbf{0} = -a_2(\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{v}_2 - a_3(\lambda_3 - \lambda_1)\mathbf{v}_3$$

Dermed er vi tilbake i situasjonen med to egenvektorer og siden $\lambda_2 - \lambda_1, \lambda_3 - \lambda_1 \neq 0$ følger det at koeffisientene $a_2 = a_3 = 0$, og vektorene er lineært uavhengige. For $r > 3$ følger vi nå nøyaktig samme prosedyre.

$\square$

Setning

Gitt $n \times n$-matrise A. Anta at A har n forskjellige egenverdier. Da finnes en basis for V av egenvektorer for A.

Eksempel

La A være 2×2-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Det karakteristiske polynomet til A er gitt ved

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

som gir egenverdier $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, med tilhørende egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Vi ser at mengden

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$$

er lineært uavhengig og danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

Eksempel

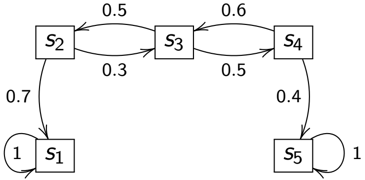
$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

har egenverdier $\lambda_1 = 1$ *og* $\lambda_2 = 2$ *med tilhørende egenvektorer*

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eksempel

Vi har et dynamisk system beskrevet av følgende figur:



Den tilhørende overgangsmatrisen er

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Eksempel

Det karakteristiske polynomet

$$\chi_P(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2(\lambda^2 - 0.45)$$

gir at matrisen P har en egenverdi $\lambda = 1$ *med* **multiplisitet** *2 og tilhørende egenvektorer*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eksempel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

har karakteristisk polynom

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -2 & \lambda_1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

abc-formelen gir

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = 1 \pm 2i$$

og egenvektorer

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Definisjon

La $\mathbf{u}$ *og* $\mathbf{v}$ *være to komplekse vektorer. Vi definerer skalarproduktet*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 \overline{v_1} + \cdots + u_n \overline{v_n}$$

hvor $\overline{v}$ *er den kompleks konjugerte til* v*.*

Setning

Anta at A *er en reell* $n \times n$*-matrise, og at* $\mathbf{v}$ *er en kompleks egenvektor med egenverdi* λ*. Da er* $\overline{\mathbf{v}}$ *en egenvektor med egenverdi* $\overline{\lambda}$*.*

Bevis.

Vi har

$$\overline{A\mathbf{v}} = \overline{A}\overline{\mathbf{v}} = A\overline{\mathbf{v}}$$

og

$$\overline{A\mathbf{v}} = \overline{\lambda \mathbf{v}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{v}}$$

□

Definisjon

En basis $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *er* **ortonormal** *dersom*

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0 \text{ for } i \neq j \text{ og } \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = 1$$

Setning

La $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *være en ortonormal basis for et underrom* V *av* $\mathbb{R}^m$*, og la* $\mathbf{w} \in V$*. Da har vi*

$$\mathbf{W} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_p)\mathbf{v}_p$$

Definisjon

En invertibel kvadratisk matrise A som oppfyller $A^{-1} = A^T$ kalles en **ortogonal** *matrise.*

Eksempel

Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -0.8 & -0.6 \\ 0.8 & -0.36 & 0.48 \\ 0.6 & 0.48 & -0.64 \end{pmatrix}$$

er ortogonal. Spesielt har vi

$$\begin{pmatrix} 0 & -0.8 & -0.6 \\ 0.8 & -0.36 & 0.48 \\ 0.6 & 0.48 & -0.64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0.6 \\ -0.8 & -0.36 & 0.48 \\ -0.6 & 0.48 & -0.64 \end{pmatrix}$$
$$= I$$

Det er ikke tilfeldig at slike matriser kalles ortogonale siden de har følgende egenskap;

Setning

Skalarproduktet av to forskjellige søyler i en ortogonal matrise er 0, mens skalarproduktet av en søyle med seg selv er 1.

Bevis.

Siden den inverse er den transponerte, så har vi $A \cdot A^T = I_n$. Hvis vi kaller søylene i A for $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, så sier denne betingelsen at $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = 0$ for $i \neq j$, og $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i = 1$. $\square$

Setning

Alle (de reelle) egenverdiene til en ortogonal $n \times n$-matrise har absoluttverdi 1.

Proposisjonen er riktig også for de komplekse egenverdiene, men det krever et litt annet argument.

Merk at vi skriver skalarproduktet som et matriseprodukt:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \overline{\mathbf{v}}$$

Bevis.

La $\mathbf{v}$ være en egenvektor for A med egenverdi λ. Da har vi på den ene side

$$(A\mathbf{v})^T \cdot A\mathbf{v} = \mathbf{v}^T A^T A\mathbf{v} =$$

og på den andre side

$$(\lambda\mathbf{v})^T \cdot \lambda\mathbf{v} = \lambda^2 \mathbf{v}^T \mathbf{v}$$

Det betyr at

$$\mathbf{v}^T \mathbf{v} = (A\mathbf{v})^T \cdot A\mathbf{v} = (\lambda\mathbf{v})^T \cdot \lambda\mathbf{v} = \lambda^2 \mathbf{v}^T \mathbf{v}$$

Vi har $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ og siden $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, så er $\mathbf{v}^T\mathbf{v} = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 > 0$ Det følger at $\lambda^2 = 1$. $\square$

Setning

La A være en ortogonal 3×3-matrise med $\det(A) = 1$. Da har A en egenvektor $\mathbf{v}$ med tilhørende egenverdi $\lambda = 1$.

Bevis.

Vi har

$$\begin{aligned}\chi_A(1) &= \det(I - A) = \det(AA^T - A) \\ &= \det(A) \cdot \det(A^T - I) = -\det(A) \cdot \det(I - A) \\ &= -\det(A) \cdot \chi_A(1)\end{aligned}$$

Siden vi har antatt at $\det(A) = 1$ følger det at $\chi_A(1) = 0$, som er ekvivalent med at $\lambda = 1$ er en egenverdi. $\square$

Spektralteoremet for symmetriske matriser

Definisjon

Den **transponerte** *til en matrise A, skrevet A^T, finner vi ved å bytte om rader og søyler, dvs*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

gir

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Den transponerte til en $n \times m$-matrise er en $m \times n$-matrise.

Eksempel

La A *være* 3×2*-matrisen gitt ved*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Da har vi at A^T *er en* 2×3*-matrise gitt ved*

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Definisjon

En kvadratisk matrise A som er lik sin egen transponerte, kalles en **symmetrisk** *matrise. Vi skriver denne betingelsen som $A^T = A$.*

Eksempel

Symmetriske matriser kan vi speile om hoveddiagonalen uten at de endrer seg. Et eksempel på en symmetrisk matrise er

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Setning

Determinanten til en ortogonal matrise er ± 1.

Bevis.

En ortogonal matrise er definert ved at $A^{-1} = A^T$. Vi har vist at $\det(A^T) = \det(A)$ og siden vi samtidig har at $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$ følger det at $\det(A)^2 = 1$. $\square$

Setning

La A være en symmetrisk $n \times n$-matrise. Da er alle egenverdiene til A reelle og det finnes en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ bestående av egenvektorer for A.

Setning

La A være en reell $n \times n$-matrise og $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ to komplekse søylevektorer. Da har vi

$$(A\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (A^T \mathbf{v})$$

Bevis.

$$(A\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = (A\mathbf{u})^T \overline{\mathbf{v}} = (\mathbf{u}^T A^T)\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{u}^T (A^T \overline{\mathbf{v}}) = \mathbf{u}^T (\overline{A^T \mathbf{v}}) = \mathbf{u} \cdot (A^T \mathbf{v})$$

$\square$

Hvis A er symmetrisk gir dette

$$(A\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (A\mathbf{v})$$

og dermed

$$(A\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = (\lambda\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \lambda|\mathbf{u}|^2$$

Men vi har også

$$(A\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot (A\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot (\lambda\mathbf{u}) = \overline{\lambda}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \overline{\lambda}|\mathbf{u}|^2$$

og det følger at λ er reell.

Merk at denne teorien har sin klare parallell hvis vi erstatter symmetrisk matrise med symmetrisk lineæravbildning.

Setning

La A være en $n \times n$-matrise med en basis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ av egenvektorer, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de tilhørende egenvektorene og M matrisen med egenvektorene som sine søyler. Det følger at M er inverterbar og

$$M^{-1}AM = D$$

hvor D er en diagonal matrise med egenverdiene langs diagonalen.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Merk at dette resultatet gjelder for symmetriske matriser.

Bevis.

La $\mathbf{e}_i$ være med i standardbasisen. Da har vi

$$M^{-1}AM\mathbf{e}_i = M^{-1}A\mathbf{v}_i = M^{-1}\lambda_i\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{e}_i$$

Cayley-Hamilton

Setning (Cayley-Hamilton)

La A være en $n \times n$-matrise med karakteristisk polynom χ_A. Da har vi

$$\chi_A(A) = 0$$

Vi skal ikke bevise dette resultatet i sin fulle generalitet, vi nøyer oss med å se på et argument for 2×2-matriser.

Bevis.

La

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

være en 2×2-matrise. Da har vi

$$\begin{aligned} \chi_A(A) &= A^2 - \operatorname{tr}(A) \cdot A - \det(A) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{12}(a_{11} + a_{22}) \\ a_{21}(a_{11} + a_{22}) & a_{12}a_{21} + a_{22}^2 \end{pmatrix} \\ &\quad - (a_{11} + a_{22}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &\quad + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

□