MAT 1110, 4. mars 2022

∗ Repetisjon/avslutning lineær algebra
∗ Dobbeltintegraler

Arne B. Sletsjøe
Universitetet i Oslo

Repetisjon

Definisjon

Gitt en kvadratisk $n \times n$-matrise A. En vektor $\mathbf{v} \neq 0$ kalles en **egenvektor** *for A dersom*

$$A \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$$

for et reelt tall λ. Tallet λ kalles for den tilhørende **egenverdien**.

Definisjon

La A være en kvadratisk matrise, og la λ være en ukjent størrelse. Polynomet

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

kalles det **karakteristiske polynomet** *til matrisen A, og røttene til polynomet er egenverdiene til matrisen.*

Setning

La A være en $n \times n$-matrise. La videre $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ være egenvektorer for A svarende til ulike egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$. Da er mengden

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$$

lineært uavhengig.

Setning

La A være en symmetrisk $n \times n$-matrise. Da er alle egenverdiene til A reelle og det finnes en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ bestående av egenvektorer for A.

Setning (Cayley-Hamilton)

La A være en $n \times n$-matrise med karakteristisk polynom χ_A. Da har vi

$$\chi_A(A) = 0$$

Vi skal ikke bevise dette resultatet i sin fulle generalitet, vi nøyer oss med å se på et argument for 2×2-matriser.

Bevis.

La

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

være en 2×2-matrise. Da har vi

$$\begin{aligned}
\chi_A(A) &= A^2 - \operatorname{tr}(A) \cdot A - \det(A) \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{12}(a_{11} + a_{22}) \\ a_{21}(a_{11} + a_{22}) & a_{12}a_{21} + a_{22}^2 \end{pmatrix} \\
&\quad - (a_{11} + a_{22}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\
&\quad + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$\square$

Eksempel

Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

har karakteristisk polynom

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$$

Det betyr at

$$\chi_A(A) = A^3 - 4A^2 + 5A - 2I = 0$$

Dette kan vi bruke til å regne ut inversen A^{-1}, vi ganger rett og slett hele likningen med A^{-1}:

$$A^2 - 4A + 5I - 2A^{-1} = 0$$

som gir

$$A^{-1} = \frac{1}{2}A^2 - 2A + \frac{5}{2}I$$

Eksempel

$$
\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} + \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Dette vil gjelde generelt for inverterbare 3×3-matriser A med karakteristisk polynom

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - \mathrm{tr}(A)\lambda^2 + \sigma\lambda - \det(A)$$

Vi har

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\left(A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \sigma I\right)$$

Setning

La A være en $n \times n$-matrise med en basis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ av egenvektorer, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de tilhørende egenvektorene og M matrisen med egenvektorene som sine søyler. Det følger at M er inverterbar og

$$M^{-1}AM = D$$

hvor D er en diagonal matrise med egenverdiene langs diagonalen.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Bevis.

La $\mathbf{e}_i$ være med i standardbasisen. Da har vi

$$M^{-1}AM\mathbf{e}_i = M^{-1}A\mathbf{v}_i = M^{-1}\lambda_i\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{e}_i$$

$\square$

Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

har en basis av egenvektorer gitt ved

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

med tilhørende egenverdier, 1, 1 og 2. I tråd med setningen over setter vi

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

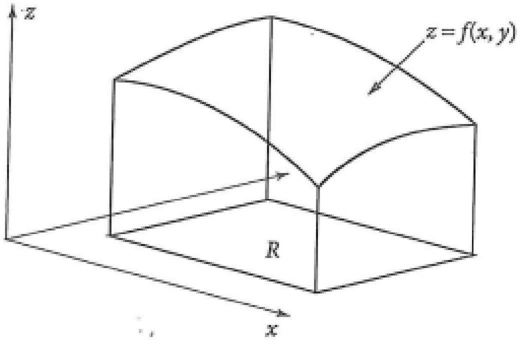
Vi har

$$M^{-1} = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Det gir

$$
\begin{aligned}
M^{-1}AM &= \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} (-\frac{2}{3}) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Integrasjon


z
z = f(x, y)
R
x

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, c \le y \le d\} = [a,b] \times [c,d]$$

Definisjon

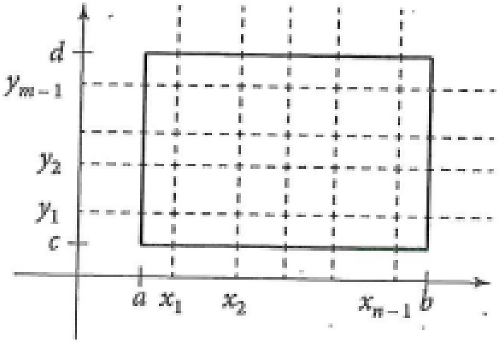
En **partisjon** Π *av* R *består av en partisjon*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

av $[a,b]$*, og en partisjon*

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d$$

av $[c,d]$*. Partisjonen gir oss et rutenett på* R*.*


d
y_{m-1}
y_2
y_1
c
a
x_1
x_2
x_{n-1}
b

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

Positiv, begerenset funksjon $f : R \to \mathbb{R}$:

$$m_{ij} = \inf\{f(x,y) \,|\, (x,y) \in R_{ij}\} \quad \text{Minste verdi}$$

$$M_{ij} = \sup\{f(x,y) \,|\, (x,y) \in R_{ij}\} \quad \text{Største verdi}$$

$$|R_{ij}| = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \quad \text{Areal}$$

$$N(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij} |R_{ij}| \quad \text{Nedre trappesum}$$

$$\O(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij} |R_{ij}| \quad \text{Øvre trappesum}$$

Anta at $R = [a, b] \times [c, d]$ er et rektangel i $\mathbb{R}^2$ og at $f : R \to \mathbb{R}$ er en begrenset funksjon. Da definerer vi *øvreintgralet* til f over R som

$$\overline{\iint_R} f(x, y)\,dxdy = \inf\{\text{Ø}(\Pi) \mid \Pi \text{ er en partisjon av } R\}$$

og *nedreintegralet* til f over R som

$$\underline{\iint_R} f(x, y)\,dxdy = \sup\{N(\Pi) \mid \Pi \text{ er en partisjon av } R\}$$

Dersom $\overline{\iint_R} f(x, y)\,dxdy = \underline{\iint_R} f(x, y)\,dxdy$, sier vi at f er *integrerbar over* R(dobbelt)integralet til f over R til å være

$$\iint_R f(x, y)\,dxdy = \overline{\iint_R} f(x, y)\,dxdy = \underline{\iint_R} f(x, y)\,dxdy$$

Setning

Anta $R = [a,b] \times [c,d]$ *er et rektangel i* $\mathbb{R}^2$, $f, g : R \to \mathbb{R}$ *er integrerbare funksjoner og* k *er en konstant. Da gjelder:*

(i) kf *er integrerbar og*

$$\iint_R kf(x,y)\,dxdy = k \iint_R f(x,y)\,dxdy$$

(ii) $f+g$ *er integrerbar og*

$$\iint_R f(x,y) + g(x,y)\,dxdy = \iint_R f(x,y)\,dxdy + \iint_R g(x,y)\,dxdy$$

(iii) *Hvis* $f(x,y) \leq g(x,y)$ *for alle* $(x,y) \in R$, *så er*

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy \leq \iint_R g(x,y)\,dxdy$$

Setning

Anta $R = [a,b] \times [c,d]$ *er et rektangel i* $\mathbb{R}^2$ *og* $f : R \to \mathbb{R}$ *en kontinuerlig funksjon. Da er* f *integrerbar over* R*.*

Gitt en partisjon av R. Et **utplukk** U er et valg at ett element c_{ij} i hvert mini-rektangel R_{ij}. Den tilhørende **Riemann-summen**:

$$R(\Pi, U) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(c_{ij})|R_{ij}|$$

Vi har

$$N(\Pi) \leq R(\Pi, U) \leq \emptyset(\Pi)$$

Definisjon

Maskevidden *til partisjonen* Π *er den største verdien av alle diagonalene i mini-rektanglene;*

$$|\Pi| = \max\{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}\}$$

Setning

Anta at $\{\Pi_n\}$ er en følge av partisjoner av rektangelet $R = [a,b] \times [c,d]$ slik at maskevidden $|\Pi_n| \to 0$ når $n \to \infty$. La U_n være et utplukk av Π_n. For alle kontinuerlige funksjoner $f : R \to \mathbb{R}$ har vi

$$\iint_r f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty} R(\Pi_n, U_n)$$

Bevis.

Integrerbarhet betyr at for alle $\varepsilon > 0$ så finnes en N slik at hvis $n \geq N$, så er $\text{Ø}(\Pi_n) - N(\Pi_n) < \varepsilon$. Resultatet følger siden

$$N(\Pi) \leq R(\Pi_n, U_n), \iint_R f(x,y)\,dxdy \leq \text{Ø}(\Pi)$$

La $f : R \to \mathbb{R}$ hvor $R : [a, b] \times [c, d]$.

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,dx\Big)dy$$

Dette betyr at vi først integrerer $f(x,y)$ med hensyn på x (og tenker på y som en konstant) for deretter å integrere svaret med hensyn på y. La $F(x,y)$ være en slik anti-derivert med hensyn på x, dvs. $\frac{\partial F}{\partial x} = f$. Det gir

$$\int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,dx\Big)dy = \int_c^d (F(b,y) - F(a,y))dy$$

Eksempel

Vi skal regne ut integralet av funksjonen $f(x,y) = xy + 1$ *over rektangelet* $Q : [0,1] \times [-1,1]$ *i* (x,y)*-planet. Vi har*

$$\iint_Q xy + 1\, dA = \int_{-1}^{1} \left(\int_0^1 xy + 1\, dx \right) dy$$

$$= \int_{-1}^{1} [\frac{1}{2}x^2 y + x]_0^1\, dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} y + 1\, dy$$

$$= [\frac{1}{4} y^2 + y]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4} - (-1) = 2$$

Eksempel

Vi kan regne ut det samme integralet, men i motsatt rekkefølge:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_Q xy+1\,dA &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 xy+1\,dy\right) dx \\
&= \int_0^1 [\tfrac{1}{2}xy^2+y]_{-1}^1\,dx \\
&= \int_0^1 (\tfrac{1}{2}x+1-\tfrac{1}{2}x+1)\,dx \\
&= [2x]_0^1 \\
&= 2-0=2
\end{aligned}$$

Det er ikke noen tilfeldighet at disse to integralene er like. Det er et generelt faktum, kalt **Fubinis teorem**.

Setning

En funksjon $f(x, y)$ *er definert og kontinuerlig over et rektangel* $Q : [a, b] \times [c, d]$ *i planet. Da har vi*

$$\iint_Q f \, dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx$$

Eksempel

Funksjonen $f(x,y) = x\sin y - ye^x$ *er definert over rektangelet* $[-1,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]$. *Vi skal beregne integralet* $\iint_Q f\,dx\,dy$.

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin y - ye^x\,dy\Big)\,dx \\
&\qquad = \int_{-1}^{1}\Big[-x\cos y - \frac{1}{2}y^2e^x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\,dx \\
&\qquad = \int_{-1}^{1}\Big(-\frac{\pi^2}{8}e^x + x\Big)\,dx \\
&\qquad = \Big[-\frac{\pi^2}{8}e^x + \frac{1}{2}x^2\Big]_{-1}^{1} \\
&\qquad = -\frac{\pi^2}{8}e + \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8}e^{-1} - \frac{1}{2} \\
&\qquad = \frac{\pi^2}{8}\Big(\frac{1}{e} - e\Big)
\end{aligned}$$

På samme måte som at integralet av en positiv funksjon i en variabel uttrykker arealet mellom x-aksen og grafen, vil integralet av en positiv funksjon i to variable uttrykke volumet mellom xy-planet og grafen.

Eksempel

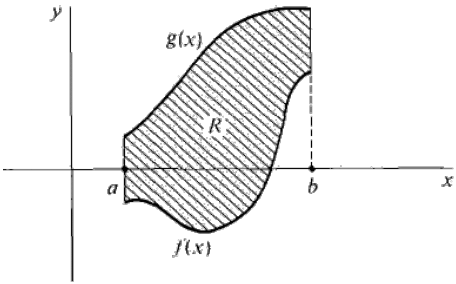
Vi skal regne ut volumet under grafen til $f(x,y) = x^2 + y^2$ over rektangelet $[-1,1] \times [-1,1]$.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} x^2 + y^2 \, dy \right) dx &= \int_{-1}^{1} [x^2 y + \frac{1}{3} y^3]_{-1}^{1} \, dx \\
&= \int_{-1}^{1} (x^2 + \frac{1}{3} - (-x^2) - (-\frac{1}{3})) \, dx \\
&= [\frac{2}{3} x^3 + \frac{2}{3} x]_{-1}^{1} \\
&= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - (-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}) = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Vi skal se på dobbeltintegralet over mer generelle områder enn rektangler, områder som er begrenset av grafene til funksjoner i en variabel. Vi begynner med de områdene vi kaller type I. Dette er områder gitt ved

$$D = \{(x, y) \,|\, a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

Dette området i (x, y)-planet er avgrenset av de to grafene til $g(x)$ og $f(x)$, mellom de to linjene $x = a$ og $x = b$. Grensene i den første integrasjonen, si med hensyn på y, vil være funksjoner i x. Disse setter vi inn for y i uttrykket for den anti-deriverte til funksjonen $f(x, y)$ med hensyn på y. Det gir oss en ny funksjon i x som vi så kan regne ut det bestemte integralet til.



y
g(x)
R
a
b
x
f(x)

Definisjon

Vi definerer integralet av funksjonen $f(x,y)$ over området D, gitt over, til å være

$$\iint\limits_D f\,dA = \int_a^b \Big(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \Big) dx$$

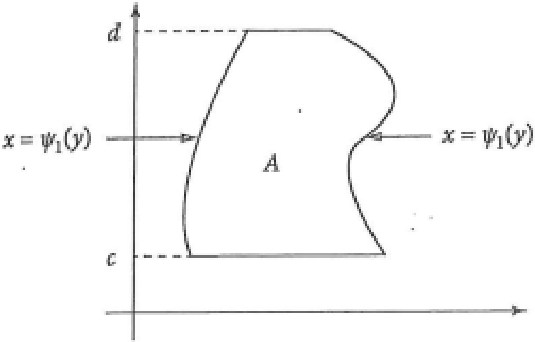
Eksempel

La D være området gitt ved ulikhetene $1 \leq x \leq 2$ og $0 \leq y \leq x^2$. Vi skal beregne dobbeltintegralet

$$\iint_D xy\,dx\,dy$$

I dette eksemplet er $g(x) = 0$ og $h(x) = x^2$. Det gir

$$\begin{aligned}\iint_D xy\,dx\,dy &= \int_1^2 \Big(\int_0^{x^2} xy\,dy\Big)dx \\ &= \int_1^2 [\frac{1}{2}xy^2]_0^{x^2}\Big)dx \\ &= \int_1^2 \frac{1}{2}x^5\,dx = [\frac{1}{12}x^6]_1^2 = \frac{63}{12}\end{aligned}$$



d
c
x = ψ1(y)
A
x = ψ1(y)

Områder (integraler) av type II er avgrenset av kurver på formen $x = g(y)$, altså grafer der x-aksen og y-aksen har byttet roller i forhold til type I.

$$D = \{(x, y) \,|\, c \leq y \leq d,\, g(y) \leq x \leq h(y)\}$$

Formelen for dobbeltintegralet av en funksjon $f(x, y)$ over et slikt område er gitt ved

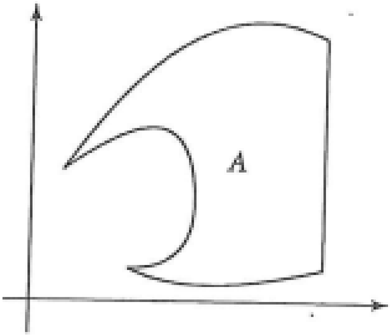
$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)\, dx \right) dy$$

Det er viktig å merke seg at i disse tilfellene er det ikke nødvendigvis mulig å bytte om på integrasjonsrekkefølgen, det kan vi kun gjøre dersom området både er av type I og av type II.

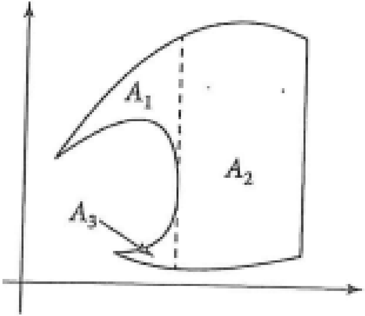
Eksempel

Vi skal beregne dobbeltintegralet $\iint_D y^2 \sin xy\, dx\, dy$ *der* D *er området mellom* $x = y$ *og* $x = 0$ *og der* $y \in [0, a]$*. Vi regner ut*

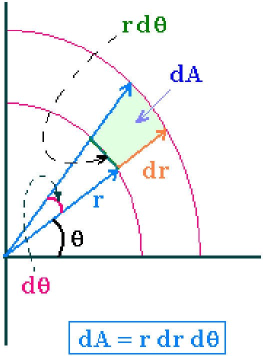
$$
\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\, dx\, dy &= \int_0^a \Big(\int_0^y y^2 \sin xy\, dx\Big) dy \\
&= -\int_0^a [y^2 \cdot \frac{1}{y} \cos xy]_0^y\, dy \\
&= -\int_0^a y \cos y^2 - y\, dy \\
&= -[\frac{1}{2} \sin y^2 - \frac{1}{2} y^2]_0^a \\
&= \frac{a^2 - \sin a^2}{2}
\end{aligned}
$$



A


A_1
A_2
A_3

Anta nå at vi har gitt en funksjon i to variable $z = f(x, y)$ over et område D i planet, og vi av gode grunner ønsker å bruke polarkoordinater. Vi erstatter variablene i funksjonsuttrykket med $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$. Det gir oss en ny funksjon i polar-variablene r og θ. For å utføre integrasjonen må vi også endre $dx\,dy$ til $dr\,d\theta$. Dersom vi tenker på $dA = dx\,dy$ som arealet av en bitte liten firkant i (x, y)-planet vil ikke forholdet mellom denne og den tilsvarende firkanten $dr\,d\theta$ være konstant, men avhenge av r dvs. hvor langt unna origo vi er.



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Eksempel

Betrakt funksjonen

$$z = f(x,y) = x + y$$

og la området D være øvre halvdel av en sirkelskive med sentrum i origo og radius 1. I polarkoordinater er D gitt ved D': $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le \pi$. *Det gir integralet*

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,dx\,dy &= \iint_{D'} (r\cos\theta + r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{1} r^2(\cos\theta + \sin\theta)\,dr\,d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\pi}(\cos\theta + \sin\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{3}[\sin\theta - \cos\theta]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{3}(\sin\pi - \cos\pi - \sin 0 + \cos 0) = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Vi kan også bruke dobbeltintegrasjon ved polarkoordinater til å beregne volumet av en kule. Vi ser på et område i (x, y)-planet gitt ved

$$D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

Vi merker oss at D ikke er noe rektangulært område. Vi har ennå ikke gått gjennom hvordan vi skal integrere over mer generelle områder enn rektangler, men problemet løser seg når vi skifter til polarkoordinater. Området D svarer da til rektangelet

$$\begin{aligned} D' &= \{(r, \theta) \,|\, 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \\ &= [0, R] \times [0, 2\pi] \end{aligned}$$

Funksjonen vi skal integrere er gitt ved

$$z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

Dette gir oss den øvre halvkula. For å finne volumet av hele kula multipliserer vi integralet med 2. Vi kan skrive om funksjonen i polarkoordinater; det gir

$$\begin{aligned} z &= f(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ &= \sqrt{R^2 - (r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2} \\ &= \sqrt{R^2 - r^2} \end{aligned}$$

Dette gir oss volumet av kula;

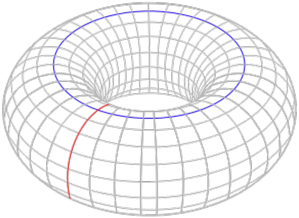
$$\begin{aligned} 2\iint_D f(x,y)dx\,dy &= 2\iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr\,d\theta \\ &= 2\int_0^R \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 - r^2}\, r\; d\theta\, dr \\ &= 2\int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\, r[\theta]_0^{2\pi}\, dr \\ &= 4\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\, r\, dr \end{aligned}$$

Vi substituerer $u = R^2 - r^2$, det gir $du = -2r\,dr$ og nye grenser $u_0 = u(0) = R^2$, $u_1 = u(R) = 0$,

$$\begin{aligned}
2\iint_D f(x,y)dx\,dy &= 4\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\, r\,dr \\
&= -4\pi \int_{R^2}^{0} \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\,du \\
&= -2\pi \tfrac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_{R^2}^{0} \\
&= -\tfrac{4\pi}{3}(0^{\frac{3}{2}} - (R^2)^{\frac{3}{2}}) \\
&= \tfrac{4\pi R^3}{3}
\end{aligned}$$

som er den korrekte formelen for volumet av en kule med radius R, først utledet av Archimedes for mer enn 2000 å siden.

Et annet eksempel på en beregning av et volum som et dobbeltintegral ved å bruke polarkoordinater er torusen,



Vi setter radius i den blå sirkelen til å være A, og den røde sirkelen til å være a. En parametrisering av torusen er gitt ved

$$\rho(r,\theta) = \sqrt{a^2 - (r-A)^2}$$

Volumet av torusen finner vi ved å integrere $\rho(r,\theta)$ over området

$$D = [0, 2\pi] \times [A-a, A+a]$$

På samme måte som for kula har vi en øvre og en nedre halv-torus, slik at volumet blir 2 ganger integralet:

$$
\begin{aligned}
V &= 2\iint_D \rho(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr\,d\theta \\
&= 2\int_{A-a}^{A+a}\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2-(r-A)^2}\,r\,d\theta\,dr \\
&= 4\pi\int_{A-a}^{A+a}\sqrt{a^2-(r-A)^2}\,r\,dr
\end{aligned}
$$

Vi setter først $v = r - A$, som gir $dv = dr$, og nye grenser $v(A-a) = -a$, $v(A+a) = a$. Det gir

$$
\begin{aligned}
V &= 4\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-v^2}\,(v+A)\,dv \\
&= 4\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-v^2}\,v\,dv + 4\pi A\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-v^2}\,dv
\end{aligned}
$$

Symmetrien av $\sqrt{a^2 - v^2}\, v$ i intervallet $[-a, a]$ gir at det første integralet blir 0, dvs

$$V = 0 + 4\pi A \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - v^2}\, dv$$

Så setter vi $v = a \sin u$ og $dv = a \cos u\, du$, med nye grenser $u = \pm\frac{\pi}{2}$, fordi $a \sin \pm\frac{\pi}{2} = \pm a$. Det gir

$$\begin{aligned} V &= 4\pi A \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a \sin u)^2}\, a \cos u\, du \\ &= 4\pi A \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sqrt{1 - (\sin u)^2} \cos u\, du \\ &= 4\pi a^2 A \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\, du \end{aligned}$$

Men vi vet at $\cos^2 u$ er $\frac{1}{2}(u + \sin u \cos u)$, som gir

$$
\begin{aligned}
V &= 4\pi a^2 A[\frac{1}{2}(u + \sin u \cos u)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 4\pi a^2 A \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})) \\
&= 2\pi^2 a^2 A
\end{aligned}
$$

som gir oss volumet av torusen. Dette er nøyaktig det samme volumet som en sylinder med radius a og lengde $2\pi A$. Når vi bøyer denne sylinderen til en torus vil volumtapet innenfor midten svare nøyaktig til volumgevinsten utenfor midten.