MAT 1110, 7. mars 2022

∗ Areal og tyngdepunkt
∗ Flateintegral
∗ Jordan-målbare mengder
∗ Variabelskifte i integraler

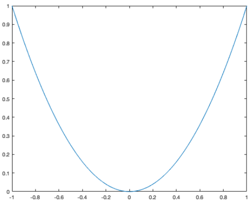
Arne B. Sletsjøe
Universitetet i Oslo

Areal og tyngdepunkt

Arealet av et område A i (x, y)-planet:

$$\text{areal}(A) = \iint_A 1 \, dxdy$$

Eksempel

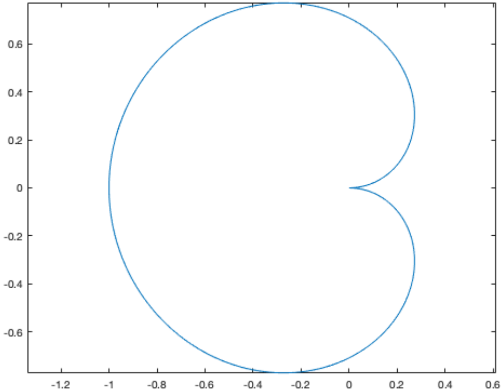


Vi skal finne arealet av området i xy-planet som ligger inne i parabelen $y = x^2$, under $y = 1$ og mellom $x = -1$ og $x = 1$. Vi beregner dobbeltintegralet

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} 1 \, dy \, dx = \int_{-1}^{1} [y]_{x^2}^{1} \, dx \\
&= \int_{-1}^{1} 1 - x^2 \, dx = [x - \frac{1}{3}x^3]_{-1}^{1} \\
&= (1 - \frac{1}{3}) - (-1 - \frac{1}{3}(-1)^3) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

Eksempel

```
t=linspace(0,2*pi,200);
x=sin(0.5*t).*cos(t);
y=sin(0.5*t).*sin(t);
plot(x,y)
axis equal
```



A er parametrisert ved $R : 0 \leq r \leq \sin\left(\frac{\theta}{2}\right),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$:

$$
\begin{aligned}
\text{areal}(A) &= \iint_A 1 \, dx \, dy \\
&= \iint_R r \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} r \, dr \, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos\theta}{2} \, d\theta = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Definisjon

La A være et område i (x, y)-planet. Vi definerer **massemiddelpunktet** *til A til å være et punkt $(\overline{x}, \overline{y})$ slik at*

$$\iint_A (x - \overline{x})\, dx\, dy = \iint_A (y - \overline{y})\, dx\, dy = 0$$

Dersom A beskriver en plate der tettheten i punktet (x, y) er gitt ved $f(x, y)$, har vi

$$\iint_A (x - \overline{x}) f(x, y)\, dx\, dy = \iint_A (y - \overline{y}) f(x, y)\, dx\, dy = 0$$

(Archimedes likevektsprinsipp)

$$\iint_A (x-\overline{x}) f(x,y)\,dx\,dy = 0$$

gir

$$\iint_A x f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A \overline{x} f(x,y)\,dx\,dy = \overline{x} \iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \overline{x} \cdot \text{volum}(A)$$

dvs.

$$\overline{x} = \frac{\iint_A x f(x,y)\,dx\,dy}{\iint_A f(x,y)\,dx\,dy} = \frac{\iint_A x f(x,y)\,dx\,dy}{\text{volum}(A)}$$

Dersom $f(x,y) = 1$, får vi

$$\overline{x} = \frac{\iint_A x\,dx\,dy}{\text{areal}(A)}$$

og tilsvarende for y;

$$\overline{y} = \frac{\iint_A y\,dx\,dy}{\text{areal}(A)}$$

Eksempel

Vi kan bruke disse formelene til å finne tyngdepunktet til en trekant med grunnlinje a og høyde h. Vi legger de tre hjørnene i punktene $(-\frac{a}{2}, 0)$, $(\frac{a}{2}, 0)$ *og* $(0, h)$. *Siden trekanten stikker like mye ut på hver side av* y*-aksen vil et enkelt symmetriargument gi at* $\overline{x} = 0$. *For å finne* y*-koordinaten deler vi trekanten i to og betrakter den delen som ligger i første kvadrant. Igjen vil et symmetriargument gi at* y*-koordinaten til tyngdepunktet er den samme for den halve trekanten som for hele trekanten. Området vi skal integrere over er gitt ved* $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$ *og* $0 \leq y \leq h - \frac{2h}{a}x$. *Den siste ulikheten får vi fra uttrykket som gir likningen til hypotenusen i den halve trekanten, nemlig* $y = h - \frac{2h}{a}x$. *Arealet av den halve trekanten er* $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h = \frac{ah}{4}$ *og formelen over gir oss*

Eksempel

$$
\begin{aligned}
\overline{y}\cdot\frac{ah}{4} &= \int_0^{\frac{a}{2}}\int_0^{h-\frac{2h}{a}x} y\,dy\,dx \\
&= \int_0^{\frac{a}{2}} [\frac{y^2}{2}]_0^{h-\frac{2h}{a}x}\,dx \\
&= \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{h^2}{2} - \frac{2h^2}{a}x + \frac{2h^2}{a^2}x^2\,dx \\
&= [\frac{h^2x}{2} - \frac{h^2}{a}x^2 + \frac{2h^2}{3a^2}x^3]_0^{\frac{a}{2}} \\
&= h^2\frac{a}{4} - \frac{h^2}{a}(\frac{a}{2})^2 + \frac{2h^2}{3a^2}(\frac{a}{2})^3 \\
&= ah^2(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12}) = ah^2\frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

Deler vi ut får vi at $\overline{y} = \frac{1}{3}h$ *som er y-koordinaten til tyngdepunktet.*

Definisjon

La A være et område i (x, y)-planet og $f : A \to \mathbb{R}$. Vi definerer **gjennomsnittsverdien** $\overline{f}$ *til f i A ved*

$$areal(A) \cdot \overline{f} = \iint_A f(x, y)\, dx\, dy$$

Det gir

$$\overline{f} = \frac{\iint_A f(x, y)\, dx\, dy}{areal(A)}$$

Eksempel

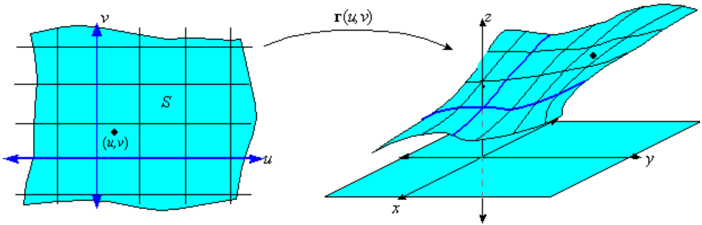
Vi skal beregne gjennomsnittsverdien til funksjonen $f(x,y) = x^2 + xy$ *over rektangelet* $[0,1] \times [0,2]$. *Arealet av området er opplagt 2, og gjennomsnittsverdien blir da*

$$
\begin{aligned}
\overline{f} &= \tfrac{1}{2} \int_0^1 \int_0^2 x^2 + xy \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 [x^2 y + \frac{1}{2} x y^2]_0^2 \, dx \\
&= \tfrac{1}{2} \int_0^1 (2x^2 + 2x) \, dx \\
&= \tfrac{1}{2} (\tfrac{2}{3} + 1) = \tfrac{5}{6}
\end{aligned}
$$

Integral over flater

Gitt parametrisert flate S

$$\mathbf{r} : A \to \mathbb{R}^3$$



Rektangel på venstre side: $[u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$ med areal $a_{ij} = (u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j)$ svarer til firkant på høyre side:

$$[\mathbf{r}(u_i, v_j), \mathbf{r}(u_i, v_j) + \mathbf{r}_u(u_i, v_j)(u_{i+1} - u_i)] \times [\mathbf{r}(u_i, v_j), \mathbf{r}(u_i, v_j) + \mathbf{r}_v(u_i, v_j)(v_{j+1} - v_j)]$$

Arealet av firkanten er gitt ved

$$\begin{aligned} &|\mathbf{r}_u(u_i, v_j)(u_{i+1} - u_i) \times \mathbf{r}_v(u_i, v_j)(v_{j+1} - v_j)| \\ &\qquad = |\mathbf{r}_u(u_i, v_j) \times \mathbf{r}_v(u_i, v_j)|(u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j) \\ &\qquad = |\mathbf{r}_u(u_i, v_j) \times \mathbf{r}_v(u_i, v_j)| a_{ij} \end{aligned}$$

Den siste likheten skriver vi

$$dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dA$$

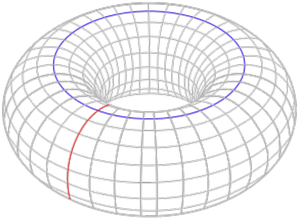
hvor dA svarer til et infinitesimalt rektangel i (u, v)-planet.

Definisjon

La A være et område i (x, y)-planet og $\mathbf{r} : A \to \mathbb{R}^3$ en parametrisert flate som vi kaller S. Da har vi

$$areal(S) = \iint_S 1 \, dS = \iint_A |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dA$$

Vi skal beregne overflaten til en torus:



Parametrisering:

$$\mathbf{r}(u,v) = ((A + a\cos u)\cos v, (A + a\cos u)\sin v, a\sin u)$$

med $0 \leq u, v \leq 2\pi$. Det gir

$$\mathbf{r}_u = (-a\sin u\cos v, -a\sin u\sin v, a\cos u)$$

$$\mathbf{r}_v = (-(A + a\cos u)\sin v, (A + a\cos u)\cos v, 0)$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\sin u \cos v & -a\sin u \sin v & a\cos u \\ -(A+a\cos u)\sin v & (A+a\cos u)\cos v & 0 \end{vmatrix} \\
&= -a(A+a\cos u)\left(\cos v \cos u\, \mathbf{i} + \sin v \cos u\, \mathbf{j} + \sin v\, \mathbf{k}\right)
\end{aligned}
$$

og

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| &= a(A+a\cos u)\left|\left(\cos v \cos u, \sin v \cos u, \sin v\right)\right| \\
&= a(A+a\cos u)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\iint_S dS &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, du\, dv \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} a(A+a\cos u)\, du\, dv \\
&= 4\pi^2 aA
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{r}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x,y)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

med absoluttverdi

$$\sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2}$$

Eksempel

Areal av $f(x,y) = x^2 + y^2$ *over* $x^2 + y^2 \leq 1$:

$$\begin{aligned}
\iint_A \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dA &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\sqrt{1+4r^2}\, d\theta\, dr \\
&= 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}\, dr \\
&= \frac{2\pi}{8} \int_1^5 \sqrt{u}\, dr \\
&= \frac{\pi}{4}\frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_1^5 \\
&= \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)
\end{aligned}$$

Definisjon

La A være et område i (x, y)-planet og $\mathbf{r} : A \to \mathbb{R}^3$ en parametrisert flate som vi kaller S. La f være en kontinuerlig funksjon på S. Da kaller vi

$$\iint_S f\, dS = \iint_A f(u, v)\, |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$$

for **flateintegralet** *av f over S.*

Eksempel

$$f(x,y,z) = xyz^2$$

$$\mathbf{r}(u,v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\sin v\,\mathbf{j} + u^2\,\mathbf{k}$$

$0 \leq u \leq 2,\ 0 \leq v \leq 2\pi.$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \cos v\,\mathbf{i} + \sin v\,\mathbf{j} + 2u\,\mathbf{k} \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -u\sin v\,\mathbf{i} + u\cos v\,\mathbf{j}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 2u \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} \\ &= -2u^2\cos v\,\mathbf{i} - 2u^2\cos v\,\mathbf{j} + u\,\mathbf{k} \end{aligned}$$

Eksempel

$$|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}| = |-2u^2 \cos v\,\mathbf{i} - 2u^2 \cos v\,\mathbf{j} + u\,\mathbf{k}| = u\sqrt{4u^2+1}$$

$$\begin{aligned}
\iint_S f\,dS &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 f(\mathbf{r}(u,v))|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}|\,du\,dv \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (u^6 \sin v \cos v)(u\sqrt{4u^2+1})\,du\,dv \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 u^7\sqrt{4u^2+1} \sin v \cos v\,du\,dv \\
&= \int_0^2 u^7\sqrt{4u^2+1}\left(\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}\sin(2v)\,dv\right)du = 0
\end{aligned}$$

Jordan-målbare mengder

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

$$\iint_A dA = \iint_{\mathbb{R}^2} 1_A \, dA$$

Er $1_A(x)$ integrerbar? Har A et areal?

Definisjon

En mengde $A \subset \mathbb{R}^2$ *er* **Jordan-målbar** *dersom* 1_A *er integrerbar.*

Definisjon

En begrenset mengde $B \subset \mathbb{R}^2$ har **innhold 0** *dersom det for hver $\varepsilon > 0$ finnes endelig mange rektangler*

$$R_1, R_2, \ldots, R_k$$

slik at

(i) $B \subset R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_k$

(ii) $\sum_j areal(R_j) < \varepsilon$

Setning

En begrenset mengde $A \subset \mathbb{R}^2$ er Jordan-målbar hvis og bare hvis randen ∂A har innhold 0.

Definisjon

Et punkt $\mathbf{x}$ *er på randa* ∂A *til* A *dersom enhver* ε*-ball* $B_\varepsilon(\mathbf{x})$ *om* $\mathbf{x}$ *inneholder både punkter i* A *og utenfor* A*.*

Setning

$$([0,1]\cap\mathbb{Q})^2$$

er ikke Jordan-målbar.

Setning

Ethvert område av type I eller II er Jordan-målbart.

Setning

Anta $A \subset \mathbb{R}^2$ *er et lukket, begrenset og Jordan-målbar mengde. Da er enhver kontinuerlig funksjon* $f : A \to \mathbb{R}$ *integrerbar over* A*. Spesielt er alle kontinuerlige funksjoner integrerbare over områder av type I eller II.*

Variabelskifte i integraler

Setning

La $U \subset \mathbb{R}^2$ *være en åpen, begrenset mengde og la* $\mathbf{T} : U \to \mathbb{R}^2$ *være en injektiv funksjon med kontinuerlige partiellderiverte slik at* $\det \mathbf{T} \neq 0$ *på hele* U*. Hvis* $D \subset U$ *er en lukket, Jordan-målbar mengde og* $f : \mathbf{T}(D) \to \mathbb{R}$ *er en kontinuerlig funksjon, så er*

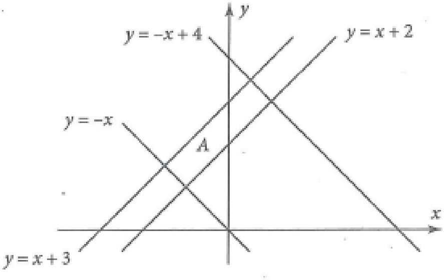
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(\mathbf{T}(u,v))|\mathbf{T}'(u,v)|\,du\,dv$$

der $A = \mathbf{T}(D)$*.*

Man bruker ofte notasjonen

$$\mathbf{T}'(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

Eksempel



$$2 \leq y - x \leq 3, \qquad 0 \leq y + x \leq 4$$

Substituerer

$$x = \tfrac{1}{2}(-u + v) \qquad y = \tfrac{1}{2}(u + v)$$

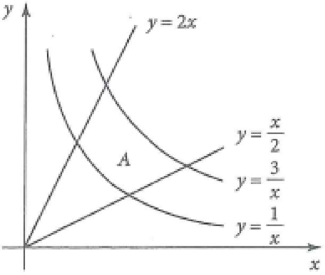
som gir

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Eksempel

$$
\begin{aligned}
\iint_A xy\,dx\,dy &= \int_2^3 \int_0^4 \left(\frac{-u+v}{2}\right)\left(\frac{+u+v}{2}\right)|-\tfrac{1}{2}|\,du\,dv \\
&= \tfrac{1}{8}\int_2^3 \int_0^4 v^2 - u^2\,dv\,du \\
&= \tfrac{1}{8}\int_2^3 [\tfrac{1}{3}v^3 - u^2 v]_0^4\,dv\,du \\
&= \tfrac{1}{8}\int_2^3 \tfrac{64}{3} - 4u^2\,du \\
&= \tfrac{1}{8}[\tfrac{64}{3}u - \tfrac{4}{3}u^3]_2^3 = -\tfrac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Eksempel



Vi skal integrere $f(x, y) = \frac{x}{y}$ *over området* A *gitt på figuren.*

$$1 \leq xy \leq 3, \qquad \frac{1}{2} \leq \frac{y}{x} \leq 2$$

Setter $u = xy$ *og* $v = \frac{y}{x}$*, som gir* $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ *og* $y = \sqrt{uv}$ *og hvor* $1 \leq u \leq 3$, $\frac{1}{2} \leq v \leq 2$.

Eksempel

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v^3}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}$$

$$\begin{aligned} \iint_A f\,dA &= \iint \frac{x}{y}\,dx\,dy \\ &= \iint_D \frac{\sqrt{\frac{u}{v}}}{\sqrt{uv}} \frac{1}{2v}\,du\,dv \\ &= \int_1^3 \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{2v^2}\,dv\,du \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{v^2}\,dv \\ &= [-\frac{1}{v}]_{\frac{1}{2}}^2 = \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Pensum, midtveiseksamen:

1.9, 1.10
2.7, 2.8
3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9
4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.12
6.1, 6.2, 6.3, 6.4