MAT 1110, 18. mars 2022

∗ Forberedelser til midtveiseksamen

Arne B. Sletsjøe
Universitetet i Oslo

Prøveeksamen

Oppgave 1 (Elementære matriser)

Hvilket av alternativene uttrykker den inverse til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

som et produkt av elementære matriser:

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Fjerner de som inneholder ikke-elementære matriser (merket rødt)

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Multipliserer de gjenstående med A

b)

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 2 (Egenverdier)

Egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

er gitt ved

a) $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 3$

b) $\lambda = 1$ med multiplisitet 2

c) $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 2$

d) $\lambda = 2$ med multiplisitet 2

e) $\lambda = -1 \pm 3i$

Karakteristisk likning

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 3 \\ -6 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 4) - 3 \cdot (-6) = \lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$$

Finner røttene:

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2} = -1 \pm 3i$$

Oppgave 3 (Egenvektorer)

Hvilken av følgende påstander om egenverdiene/egenvektorene til en matrise er ikke riktig?

a) Hvis $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er egenvektorer med samme egenverdi, så er også $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ en egenvektor

b) Egenverdiene til en matrise er røtter i matrisens karakteristiske polynom

c) En symmetrisk matrise har en basis av egenvektorer

d) Egenvektorer for forskjellige egenverdier er lineært uavhengige

e) Hvis λ_1 og λ_2 er forskjellige egenverdier, så er også $\lambda_1 + \lambda_2$ en egenverdi

a) Hvis $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er egenvektorer med samme egenverdi, så er også $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ en egenvektor

Vi har $A\mathbf{v}_1 = \lambda \cdot \mathbf{v}_1$ og $A\mathbf{v}_2 = \lambda \cdot \mathbf{v}_2$. Det betyr at

$$A(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = A\mathbf{v}_1 - A\mathbf{v}_2 = \lambda \cdot \mathbf{v}_1 - \lambda \cdot \mathbf{v}_2 = \lambda(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$$

b) Nærmest definisjonen på matrisens karakteristiske polynom

c) Spektralteoremet for symmetriske matriser

d) La $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1$ og $A\mathbf{v}_2 = \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2$ og anta at det finnes tall c_1 og c_2 (ikke begge 0) slik at $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Da har vi

$$\mathbf{0} = A \cdot \mathbf{0} = A(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2$$

Dette gir oss likningssystemet

$$\begin{aligned} c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 &= \mathbf{0} \\ c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2 &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Vi antar at $c_2 \neq 0$, multipliserer den øverste likningen med λ_1 og trekker de fra hverandre. Det gir

$$c_2\lambda_1\mathbf{v}_2 - c_2\lambda_2\mathbf{v}_2 = c_2(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

som betyr at $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ eller $\lambda_1 = \lambda_2$. Motsigelse.

e) Hvis λ_1 og λ_2 er forskjellige egenverdier, så er også $\lambda_1 + \lambda_2$ en egenverdi

Matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

har to egenverdier $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 2$, men $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 + 2 = 3$ er åpenbart ikke noen egenverdi for matrisen.

Oppgave 4 (Karakteristisk polynom)

Det karakteristiske polynomet til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

er gitt ved

a) $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 2)$
b) $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2$
c) $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 2$
d) $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$
e) $\chi_A(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda + 2)$

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 & 1 \\ 6 & \lambda-2 & -3 \\ -3 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-2) + 0\cdot(-3)\cdot(-3) + 1\cdot 6\cdot 0 \\
&\quad - (\lambda+2)\cdot(-3)\cdot 0 - 0\cdot 6\cdot(\lambda-2) - 1\cdot(\lambda-2)\cdot(-3) \\
&= \lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda + 8 + 3\lambda - 6 \\
&= \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2
\end{aligned}$$

d) $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$

Oppgave 5 (Teorispørsmål om løsning av likningssystemer)

La A være 3×3-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hvilken av følgende påstander er sann?

a) Determinanten til A er 0.

b) Likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har uendelig mange løsninger for alle valg av $\mathbf{b}$.

c) Den reduserte trappeformen til A har kun en pivotsøyle.

d) Likningen $A\mathbf{x} = 0$ har kun løsningen $\mathbf{x} = 0$.

e) Den reduserte trappeformen til A har ingen pivotsøyle.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot (-3) \cdot 1 + (-2) \cdot 7 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 7 \cdot 1 - (-2) \cdot 2 \cdot 1 - 4 \cdot (-3) \cdot 0$$
$$= -3 + 0 + 8 - 7 + 4 + 0 = 2 \neq 0$$

Determinant $\neq 0$ innebærer at den reduserte trappematrisen har tre pivotsøyler og at likningssystemer med A som koeffisientmatrise har entydige løsninger.

a) Determinanten til A er 0. Galt

b) Likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har uendelig mange løsninger for alle valg av $\mathbf{b}$. Galt

c) Den reduserte trappeformen til A har kun en pivotsøyle. Galt

d) Likningen $A\mathbf{x} = 0$ har kun løsningen $\mathbf{x} = 0$. $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$

e) Den reduserte trappeformen til A har ingen pivotsøyle. Galt

Oppgave 6 (Determinanter)

Hvilken av følgende påstander om determinanten til en kvadratisk $n \times n$-matrise A er <u>ikke</u> riktig:

a) Dersom A er øvre triangulær så er determinanten til matrisen lik produktet av elementene på diagonalen

b) Hvis A har en hel rad av 0-er, så er determinanten til A lik 0

c) Hvis A er en $2n \times 2n$-matrise så vil ombytting av to rader ikke endre fortegnet til determinanten

d) Hvis n er et oddetall, så er $\det(-A) = -\det(A)$

e) $\det(M^{-1}AM) = \det(A)$ hvor M er en inverterbar $n \times n$-matrise

c) Ombytting av to rader vil alltid skifte tegn på determinanten, uavhengig av størrelsen på matrisen.

d)

$$\det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A \quad \text{for } n \text{ odde}$$

e)

$$\det(M^{-1}AM) = \det M^{-1} \cdot \det A \cdot \det M = \frac{1}{\det M} \cdot \det A \cdot \det M = \det A$$

Oppgave 7 (Kjeglesnitt)

Hva slags kjeglesnitt får vi som løsningen på ligningen

$$-x^2+2x-4y^2+16y-13=0$$

a) En hyperbel med sentrum i $(1,2)$ og med asymptoter $y-2=\pm 2(x-1)$

b) En hyperbel med sentrum i $(2,1)$ og med asymptoter $y-1=\pm 2(x-2)$

c) En ellipse med sentrum i $(1,2)$ og halvakser $a=2$ og $b=1$

d) En ellipse med sentrum i $(2,1)$ og halvakser $a=2$ og $b=1$

e) En parabel med brennpunkt i $(1,1)$ og styrelinje $y=-1$

$$-x^2 + 2x - 4y^2 + 16y - 13 = 0$$

kan skrives

$$\begin{aligned}
&-x^2 + 2x - 1 + 1 - 4y^2 + 16y - 16 + 16 - 13 \\
&= -(x-1)^2 - 4(y-2)^2 + 1 + 16 - 13 \\
&= -(x-1)^2 - 4(y-2)^2 + 4 = 0
\end{aligned}$$

Dette kan vi skrive som

$$(x-1)^2 + 4(y-2)^2 = 4$$

eller

$$\frac{(x-1)^2}{2^2} + (y-2)^2 = 1$$

som beskriver en ellipse med sentrum i $(1,2)$ og halvakser $a = 2$ og $b = 1$.

Oppgave 8 (Tangentplan)

Tangentplanet til flaten

$$f(x,y,z) = x^2 + xy + yz + 2 = 0$$

i punktet $(1,-1,2)$ har likning

a) $x + 3y - z = -4$

b) $x - 3y - z = 2$

c) $x - 3y + z = 6$

d) $x + 3y + z = 0$

e) $x + 3y - z = 4$

Flaten er en nivåflate for funksjonen

$$f(x,y,z) = x^2 + xy + yz + 2$$

Gradienten til funksjonen står normalt på nivåflatene

$$\begin{aligned}\nabla f(1,-1,2) &= (2x+y)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}\big|_{(x,y,z)=(1,-1,2)} \\ &= \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}\end{aligned}$$

Tangentflaten er gitt ved alle (x,y,z) som er slik at

$$\begin{aligned}((x,y,z)-(1,-1,2))\cdot\nabla f(1,-1,2) &= (x-1, y+1, z-2)\cdot(1,3,-1) \\ &= x-1+3(y+1)-(z-2) \\ &= x+3y-z+4 = 0\end{aligned}$$

dvs.

$$x+3y-z-4$$

Oppgave 9 (Buelengde)

Buelengden B til kurven

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{3} t\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{6} t^2\,\mathbf{j} + \frac{1}{9} t^3\,\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

er gitt ved

a) $B = \frac{2}{9}$
b) $B = \frac{1}{3}$
c) $B = \frac{4}{9}$
d) $B = \frac{5}{9}$
e) $B = \frac{2}{3}$

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{1}{3}\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{3}t\,\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^2\,\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}'(t)| &= \sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{3}t)^2 + (\frac{1}{3}t^2)^2)} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{(1 + 2t^2 + t^4} = \frac{1}{3}(1 + t^2)\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{3}(1 + t^2)\,dt = \frac{1}{3}[t + \frac{1}{3}t^3]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3} = \frac{4}{9}$$

Oppgave 10 (Potensialfunksjon)

En potensialfunksjon ϕ til vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = y\,\mathbf{i} + (x+z^2)\,\mathbf{j} + 2yz\,\mathbf{k}$$

er gitt ved

a) $\phi(x,y,z) = xy + yz^2 + 4$
b) $\phi(x,y,z) = xy + 2yz + 1$
c) $\phi(x,y,z) = xyz + xyz^2 + 2$
d) $\phi(x,y,z) = xy + yz^2 + x^2 + 3$
e) $\phi(x,y,z) = xy + yz$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = y\,\mathbf{i} + (x+z^2)\,\mathbf{j} + 2yz\,\mathbf{k}$$

$$\int y\,dx = xy + g_1(y,z)$$
$$\int (x+z^2)\,dy = xy + yz^2 + g_2(x,z)$$
$$\int 2yz\,dz = yz^2 + g_3(x,y)$$

tilsier at $\phi(x,y,z) = xy + yz^2$ er en potensialfunksjon. Å legge til en konstant spiller ingen rolle.

a) $\phi(x,y,z) = xy + yz^2 + 4$

Oppgave 11 (Linjeintegralet for skalarfelt)

Regn ut linjeintegralet

$$L = \int_{\mathscr{C}} f \, ds$$

når $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{5}}(xy - x^2)$ og $\mathscr{C}$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}, \quad t \in [0,3]$$

a) $L = 9$
b) $L = 12$
c) $L = 15$
d) $L = 18$
e) $L = 21$

$$L = \int_{\mathscr{C}} f \, ds = \int_0^3 f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|dt$$

hvor $f(\mathbf{r}(t)) = \frac{1}{\sqrt{5}}(t(2t) - t^2) = \frac{t^2}{\sqrt{5}}$ og $|\mathbf{r}'(t)| = |\mathbf{i} + 2\mathbf{j}| = \sqrt{5}$ Det gir

$$\begin{aligned} L &= \int_0^3 f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|dt \\ &= \int_0^3 \frac{t^2}{\sqrt{5}}\sqrt{5}dt \\ &= [\frac{1}{3}t^3]_0^3 = 9 \end{aligned}$$

a) $L = 9$

Oppgave 12 (Linjeintegral av vektorfelt)

Regn ut linjeintegralet

$$L = \int_{\mathscr{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

når $\mathbf{F}(x,y) = x^2\,\mathbf{i} - xy\,\mathbf{j}$ og kurven $\mathscr{C}$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}, \quad t \in [0,2]$$

a) $L = -8$
c) $L = -6$
e) $L = 0$
d) $L = 6$
b) $L = 8$

$$L = \int_{\mathscr{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Vi har

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = t^2\,\mathbf{i} - 2t^2\,\mathbf{j}$$

og

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

Det gir

$$L = \int_{\mathscr{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 (t^2\,\mathbf{i} - 2t^2\,\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i} + 2\mathbf{j})\,dt = -\int_0^2 3t^2\,dt = -[t^3]_0^2 = -8$$

a) $L = -8$

Oppgave 13 (Integral av konservativt felt)

La $\mathscr{C}$ være den parametriserte kurven $\mathbf{r}(\theta) = \mathbf{2}\cos\theta\,\mathbf{i} + \mathbf{2}\sin\theta\,\mathbf{j}$, hvor $\theta \in [0, 2\pi]$. Regn ut integralet

$$\int_{\mathscr{C}} (x + 2y + \sin x \cos x)\,\mathrm{d}x + (2x + y + e^{2y})\,\mathrm{d}y$$

Feltet er oppgitt å være konservativt, men for ordens skyld:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x + 2y + \sin x \cos x) = 2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(2x + y + e^{2y}) = 2$$

Så feltet har en potensialfunksjon. Da er integralet gitt ved verdien i endepunktene, men siden vi integrerer langs en lukket kurve vil integralet bli 0.

c) 0

Oppgave 14 (Dobbeltintegraler)

Vi har gitt et dobbeltintegral

$$A = \iint_Q (6xy^2 + 4x\cos y)\,dx\,dy$$

der $Q = [0,1] \times [0,\pi]$. Hva er verdien av A?

a) $A = \pi$
b) $A = \pi^2$
c) $A = \pi^3$
d) $A = \pi + \pi^2$
e) $A = \pi^2 + \pi^3$

$$
\begin{aligned}
A &= \iint_Q (6xy^2 + 4x\cos y)\, dx\, dy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^\pi (6xy^2 + 4x\cos y)\, dy \right) dx \\
&= \int_0^1 [2xy^3 + 4x\sin y]_0^\pi \, dx \\
&= \pi^3 \int_0^1 2x\, dx \\
&= \pi^3 [x^2]_0^1 = \pi^3
\end{aligned}
$$

Oppgave 15 (Tyngdepunkt for et område i planet)
Et område A i (x,y)-planet er gitt ved $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1-x^2$. Da er massemiddelpunktet til A gitt ved

a) $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, \frac{2}{5})$
b) $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, \frac{3}{5})$
c) $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, \frac{1}{2})$
d) $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, \frac{1}{3})$
e) $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, \frac{2}{3})$

Vi regner først ut arealet:

$$A = \int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{1-x^2} dy \right) dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = [x - \frac{1}{3}x^3]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

Ved symmetri ser vi at $\overline{x} = 0$.

$$\begin{aligned}
A \cdot \overline{y} &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{1-x^2} y\, dy \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2\, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4)\, dx \\
&= \frac{1}{2} [x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5]_{-1}^{1} = \frac{8}{15}
\end{aligned}$$

Det gir

$$\overline{y} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{5}$$

som betyr $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, \frac{2}{5})$.