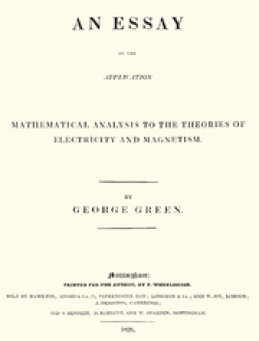
MAT 1110, 1. april 2022

$*$ Greens teorem

Arne B. Sletsjøe
Universitetet i Oslo

Greens teorem

Dette dreier seg om et av matematikkens mest berømte resultater, nemlig det som kalles **Stokes teorem**. Stokes teorem ble først formulert av vitenskapsmannen William Thompson (1824-1907), eller Lord Kelvin, i 1850, men har fått navn etter Sir George Gabriel Stoke (1819-1903).



AN ESSAY

MATHEMATICAL ANALYSIS TO THE THEORIES OF ELECTRICITY AND MAGNETISM.

GEORGE GREEN.

Den 2-dimensjonale versjonen av Stokes teorem som vi skal se på kalles **Greens teorem**,

oppkalt etter George Green (1793-1841). Green formulerte dette resultatet i det oppsiktsvekkende essayet *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism* fra 1828. Essayet er oppsiktsvekkende av to grunner. For det første fordi det inneholder nye og banebrytende resultater, for det andre fordi det er skrevet av en legmann. Green hadde faktisk bare ett års skolegang! Her er hans resultat:

Setning

La C være en positivt orientert (dvs. mot klokka), lukket kurve i planet gitt ved parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ og la D være det området som kurven C omslutter. La $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ være et vektorfelt. Da har vi

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$

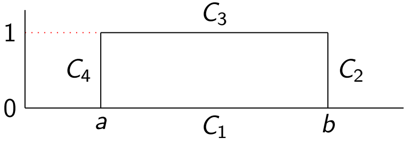
La D være rektangelet $D = [a,b] \times [0,1]$ og $\mathbf{F}$ et vektorfelt gitt ved $\mathbf{F}(x,y) = f(x)\mathbf{j}$. De fire kantene i rektangelet:

C_1: $a \leq x \leq b$, $y = 0$, $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i}$, $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i}$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = f(t)\mathbf{j}$; $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$

C_2: $x = b$, $0 \leq y \leq 1$, $\mathbf{r}(t) = b\mathbf{i} + t\mathbf{j}$, $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{j}$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = f(b)\mathbf{j}$;
$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(b)$, $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = \int_0^1 f(b)\, dt = f(b)$

C_3: $a \leq x \leq b$, $y = 1$, $\mathbf{r}(t) = -t\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{r}'(t) = -\mathbf{i}$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = f(-t)\mathbf{j}$;
$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$

C_4: $x = a$, $0 \leq y \leq 1$, $\mathbf{r}(t) = a\mathbf{i} - t\mathbf{j}$, $\mathbf{r}'(t) = -\mathbf{j}$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = -f(a)\mathbf{j}$;
$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -f(a)$, $\int_{C_4} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = \int_0^1 -f(a)\, dt = f(a)$



$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(b) - f(a)$$

$D = [a,b] \times [0,1]$ og $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}(x,y) = f(x)\mathbf{j}$

$$\begin{aligned}\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) dx\,dy &= \iint_D \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial x}\right) dx\,dy \\ &= \int_a^b \int_0^1 f'(x)\,dy\,dx \\ &= \int_a^b f'(x)\,dx\end{aligned}$$

Greens teorem gir

$$f(b) - f(a) = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) dx\,dy = \int_a^b f'(x)\,dx$$

Eksempel

Betrakt det sirkulære vektorfeltet $f(x,y) = (-y,x)$ *og sirkelen* $C : \mathbf{r}(t) = (R\cos t, R\sin t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$.

Venstresiden i Greens teorem

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} (-R\sin t\mathbf{i} + R\cos t\mathbf{j})\cdot(-R\sin t\mathbf{i} + R\cos t\mathbf{j})\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (R^2\cos^2 t + R^2\sin t)\,dt = 2\pi R^2\end{aligned}$$

Høyresiden kan vi også regne ut,

$$\begin{aligned}\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}x - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right)dx\,dy &= \iint_D (1+1)\,dx\,dy \\ &= 2\cdot areal(D) = 2\pi R^2\end{aligned}$$

Eksempel

Vi skal beregne integralet

$$\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy = \oint_C y^2 x'(t) + 3xyy'(t)\,dt$$

rundt øvre halvpart av enhetssirkelen med sentrum i origo. Vi har

$$\begin{aligned}
\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}3xy - \frac{\partial}{\partial y}y^2\right)dx\,dy \\
&= \iint_D (3y - 2y)\,dx\,dy = \iint_D y\,dx\,dy \\
&= \int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} [\frac{1}{2}y^2]_0^{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx \\
&= \frac{1}{2}[x - \frac{1}{3}x^3]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Eksempel

Vi kan uttrykke arealet av et område som et kurveintegral:

$$\oint_C -\frac{1}{2}y\,dx + \frac{1}{2}x\,dy = \iint_D \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}x - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right)dx\,dy$$
$$= \iint_D 1\,dx\,dy$$
$$= areal(D)$$

Eksempel

Vi lar kurven C være firkanten gitt av hjørnene $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ og $(1,1)$. Vi skal beregne kurveintegralet

$$\oint_C (5 - xy - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy)\,dy$$

Ved Greens teorem er dette ensbetydende med å regne ut dobbeltintegralet av $2x - 2y + x + 2y = 3x$ over firkanten.

$$\iint_D 3x\,dx\,dy = 3 \cdot areal(D) \cdot \overline{x} = \frac{3}{2}$$

Et kvadrat $Q_\varepsilon : 0 \le x, y \le \varepsilon$ og et vektorfelt $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i}$. Kvadratet har 4 kanter:

1. $e_1 : 0 \le x \le \varepsilon,\ y = 0,\ \mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i},\ \mathbf{r}_1'(t) = \mathbf{i},\ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 = P(t,0)$
2. $e_2 : 0 \le y \le \varepsilon,\ x = \varepsilon,\ \mathbf{r}_2(t) = \varepsilon\mathbf{i} + t\mathbf{j},\ \mathbf{r}_2'(t) = \mathbf{j},\ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2 = 0$
3. $e_3 : 0 \le x \le \varepsilon,\ y = \varepsilon,\ \mathbf{r}_3(t) = -t\mathbf{i} + \varepsilon\mathbf{j},\ \mathbf{r}_3'(t) = -\mathbf{i},\ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_3 = -P(t,\varepsilon)$
4. $e_4 : 0 \le y \le \varepsilon,\ x = \varepsilon,\ \mathbf{r}_4(t) = t\mathbf{j},\ \mathbf{r}_4'(t) = \mathbf{j},\ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_4 = 0$

som gir

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial Q} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^\varepsilon \left(P(t,0) - P(t,\varepsilon)\right) dt \\
&\approx \int_0^\varepsilon -\varepsilon \frac{\partial P}{\partial y}(t,0)\, dt \\
&= \int_0^\varepsilon \int_0^\varepsilon -\frac{\partial P}{\partial y}(x,0)\, dx\, dy \\
&= \iint_Q -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\, dx\, dy
\end{aligned}$$

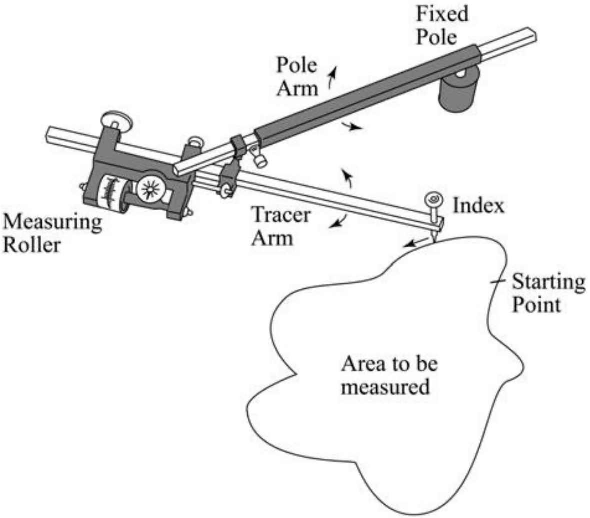
Vi kan gjøre det samme for vektorfelt i y-retning og vi kan dekke et område i (x, y)-planet med sånne små Q_ε-kvadrater. Det gir oss **Greens teorem**:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$

Planimeter:

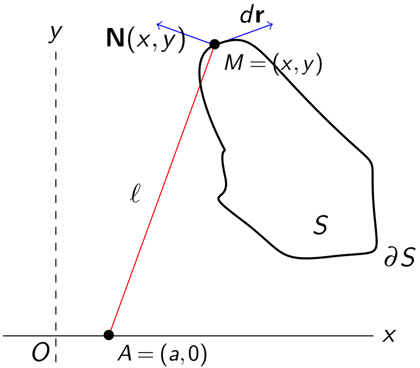
Et planimeter er et instrument som kan brukes til å måle arealet av et område avgrenset av et omriss i planet. Det ble oppfunnet av den bayerske ingeniøren J.H.Hermann i 1814. Hans planimeter var et såkalt lineært planimeter, mens et polart planimeter ble konstruert av Jacob Amsler rundt 1854.

Polart planimeter

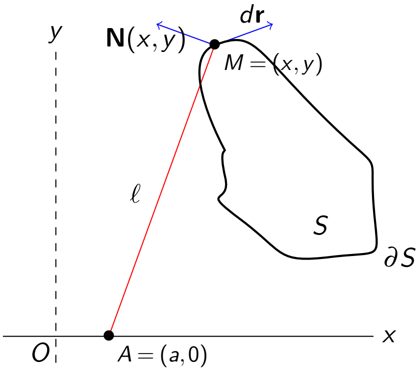


Skisse av virkemåten til et polart planimeter

Skjematisk illustrasjon av det lineære planimeteret:



Planimeteret har en fast akse, i figuren representert ved x-aksen. Armen AM mellom punktene $A=(a,0)$ og $M=(x,y)$ har lengde $\ell=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$ og endepunktet A kan bevege seg fritt langs med x-aksen. Punktet M fører vi manuelt langs kurven ∂S og punktet A vil da følge etter, fram og tilbake langs x-aksen.



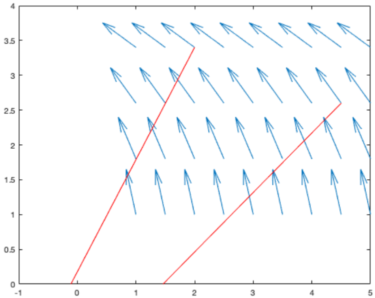
På armen AM sitter det et telleverk som måler hvor langt punktet M beveger seg på tvers av AM, dvs. parallelt med normalvektoren $\mathbf{N}(x, y)$. Ideen med planimeteret er at når punktet $\mathbf{M}$ føres rundt omrisset ∂S, så vil telleverket måle arealet innenfor omrisset.

Vi lar $\mathbf{N}(x,y)$ være vektorfeltet som i punktet M består av en enhetsvektor (mot venstre) som står normalt på AM. Da har vi

$$\mathbf{N}(x,y) = (\frac{-y}{\ell}, \frac{x-a}{\ell})$$

Hvorfor? Vektoren AM har koordinater $(x-a, y)$. Det betyr at vektoren $(-y, x-a)$ står normalt på AM. Lengden av denne vektoren er $\sqrt{(x-a)^2+y^2} = \ell$. Det betyr at $(-\frac{y}{\ell}, \frac{x-a}{\ell})$ står normalt på AM og har lengde 1.

MATLAB-plot av dette vektorfeltet. Vi har satt $\ell = 4$.




```
[x,y]=meshgrid(1:0.5:5,1:0.8:3.8);
u = -y/4;
v = sqrt(16-y.^2)/4;
quiver(x,y,u,v)
```

Her har vi også plottet inn armen AM for to av pilene i vektorfeltet.

Ved et omløp rundt ∂S vil telleverket beregne uttrykket

$$\oint_{\partial S} \mathbf{N} \cdot d\mathbf{r}$$

hvor ∂S er parametrisert ved $\mathbf{r}(t)$. Greens teorem sier at for et vektorfelt $\mathbf{N} = (P, Q)$ og en lukket kurve ∂S, parametrisert ved $\mathbf{r}$ og som omslutter et område $\mathscr{S}$ i planet, så har vi

$$\oint_{\partial S} \mathbf{N} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathscr{S}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

Vi kan bruke Greens teorem til å vise at telleverket faktisk (opp til multiplikasjon med en konstant) beregner arealet av S.

(NB. Husk at a er en funksjon av x og y gjennom likningen $\ell^2 = (x-a)^2 + y^2$)

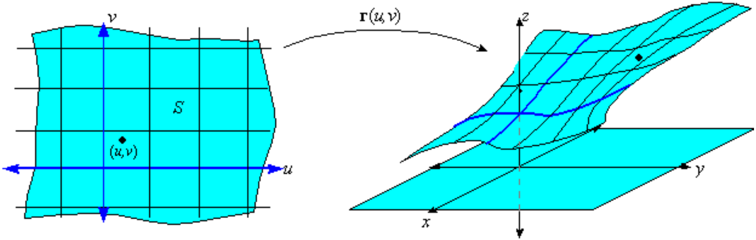
Vi har $x - a = \sqrt{\ell^2 - y^2}$, dvs. $\frac{\partial(x-a)}{\partial x} = \frac{\partial\sqrt{\ell^2-y^2}}{\partial x} = 0$. Det betyr at

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial(\frac{-y}{\ell})}{\partial y} - 0 = \frac{1}{\ell}$$

Det kan kanskje virke forvirrende at $\frac{\partial(x-a)}{\partial x} = 0$, men det skyldes altså at verdien av a varierer med x.

Dette betyr at telleverket beregner

$$\iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \iint_S = \frac{1}{\ell}\, dx\, dy = \frac{1}{\ell}\text{areal}(S)$$



Hvordan kan vi gjøre Greens teorem på en vilkårlig flate?

I Greens teorem tar vi utgangspunkt i vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

Teoremet sier at komponenten av dette feltet i tangentiell retning rundt området er lik integralet av et avledet uttrykk (derivert) av feltet over området. Uttrykket er gitt ved

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

I 3 dimensjoner har vi et litt mer generelt uttrykk for vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$$

og området er en flate i rommet S med rand ∂S. Det avledete uttrykket erstatter vi med et nytt vektorfelt

$$\nabla \times \mathbf{F} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\mathbf{i} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\mathbf{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\mathbf{k}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Vi bruker også notasjonen $\nabla \times \mathbf{F} = \text{curl}(\mathbf{F})$ og dette kalles **virvlingen** til feltet $\mathbf{F}$.

Setning (Stoke)

La S være en flate i $\mathbb{R}^3$ med rand ∂S. La

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$$

være et vektorfelt på S. Da har vi

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Dersom vi har $S \subset \mathbb{R}^2$ kan randa S paramertiseres med

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}, \quad (x, y) \in S$$

og $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. Det gir

$$\nabla \times \mathbf{F} \cdot n = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \cdot \mathbf{n} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

og vi får Greens teorem tilbake:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$

Setning (Stokes teorem, generell form)

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega$$

- Hvis S er et intervall på tallinja og ω en 0-form (funksjon): Fundamentalteoremet for differensial- og integralregningen
- Hvis S er et område i planet og ω er en 1-form ($\omega = f\,dx + g\,dy$): Greens teorem
- Hvis S er en flate i rommet og ω er en 1-form: Stokes vanlige teorem
- Hvis S er et legeme i rommet og ω er en 2-form: Divergensteoremet