MAT 1110, 4. april 2022

∗ Iterasjon
∗ Topologi
∗ følger i $\mathbb{R}^n$
∗ Komplettthet av $\mathbb{R}^n$

Arne B. Sletsjøe
Universitetet i Oslo

Iterasjon

Vi ser på iterasjoner av funksjonen $f(x) = x^2 - 1$. En **bane** er bestemt av en startverdi x_0 og iterasjoner av funksjonen f, dvs $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots$. Hvis vi lar startpunktet være $x_0 = 2$, så vil iterasjonen av funksjonen $f(x) = x^2 - 1$ gi oss banen

$$\{2, 3, 8, 63, 3968, \ldots\}$$

som innebærer at $f^n(x_0) \to \infty$ når $n \to \infty$. Velger vi derimot startpunktet $x_0 = 1$ får vi en etter hvert periodisk bane

$$\{1, 0, -1, 0, -1, \ldots\}$$

siden $f(-1) = 0$ og $f(0) = -1$. Vi kan endre startpunktet bare litt, og starte med $x_0 = 0.9$. Da får vi banen

$$\{0.9, -0.19, -0.96, -0.07, -0.99, \ldots\}$$

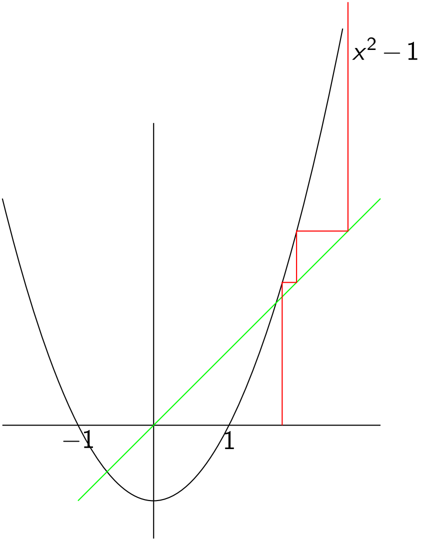
Denne banen vil etter hvert konvergere mot den periodiske banen $\{-1, 0\}$.

Siden funksjonen er den samme for alle banene, vl banene være entydig bestemt av sitt startpunkt. En klassifikasjon av banene er dermed det samme som en klassifikasjon av startpunktene.

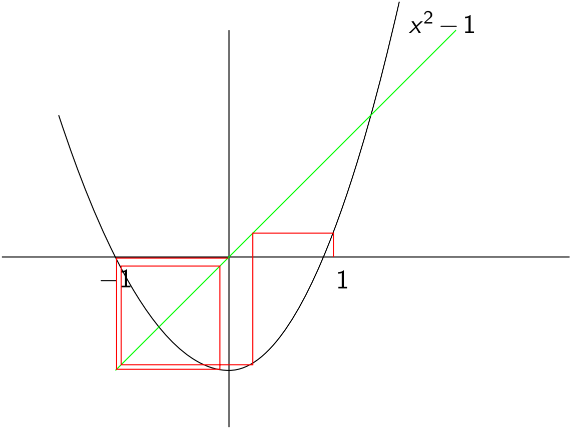
Ulike startpunkter kan gi veldig ulike baner. Vi har sett at å starte med $x_0 = 2$ betyr at iterasjonene vil gå mot ∞, mens $x_0 = 0.9$ betyr at vi konvergerer mot en periodisk bane. Det siste vil faktisk være tilfelle for alle startpunkter i intervallet

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x_0 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

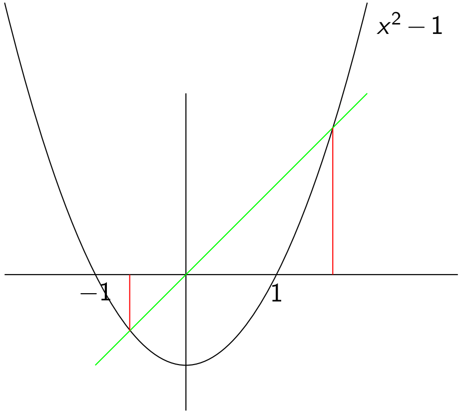
med unntak av $z = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ hvor $f(z) = z$, og som vi beskriver som et fikspunkt for funksjonen.



$1.7,\ 1.89,\ 2.57,\ \ldots, \to \infty$



$$1.1,\ 0.21,\ -0.95,\ -0.08,\ -0.99,\ -0.01,\ \ldots, \to -1,\ 0,\ -1,\ 0,\ \ldots$$



Fikspunkter: $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Fikspunkter: $x^2 - 1 = x$ eller $x^2 - x - 1 = 0$, dvs. $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Periodisk av periode 2:

$$
\begin{gathered}
(x^2-1)^2 - 1 = x \\
\Downarrow \\
x^4 - 2x^2 - x = (x^2 - x - 1)(x+1)x = 0 \\
\Downarrow \\
x \in \{-1, 0\}
\end{gathered}
$$

Vi deler mengden av startpunkter opp i to kategorier, de **tamme** og de **ville**. De tamme punktene er slik at for alle startpunkter i nærheten av dem, så vil banene ha relativt like egenskaper. For punktene i intervallet $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x_0 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, der alle banene, på ett unntak nær, konvergerer mot den periodiske banen $\{-1,0\}$, har vi en slik felles egenskap. Mengden av tamme punkter kaller vi **Fatou-mengden** til systemet. Komplementet til Fatou-mengden, bestående av de ville punktene, kalles **Julia-mengden**. Et eksempel på et vilt punkt i Julia-mengden for iterasjonen $f(x) = x^2 - 1$ er fikspunktet $z = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Banen til z består kun av z, men starter vi iterasjonen rett til siden for z, får vi en følge av iterasjoner som beveger seg vekk fra z, og som konvergerer mot den periodiske banen $\{-1,0\}$. Alternativt kan vi si at et punkt z i Julia-mengden er ustabilt i forhold til den typen bane som iterasjonen setter opp i punktet.

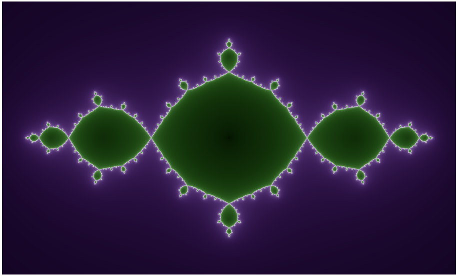


Foto: Georg-Johann Lay

Figure: Illustrasjon av systemet gitt ved $f(z) = z^2 - 1$, $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Den hvite kurven er Julia-mengden, mens den lilla og den grønne mengden er de to komponentene av Fatou-mengden. Den lilla viser alle startpunkter hvor banen vil gå mot ∞, mens punkter i den grønne mengden vi danne baner som etter hvert konvergerer mot den periodiske banen $\{-1, 0\}$.

Topologi

Definisjon

For et punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ *definerer vi* **den åpne ballen om a** *med radius* $r > 0$ *ved*

$$B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}$$

og **den lukkede ballen** *som*

$$\overline{B}(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leq r\}$$

Definisjon

La $A \subset \mathbb{R}^m$.

(i) *Punktet* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ *kalles et* **indre punkt** *dersom det finnes en åpen ball* $B(\mathbf{a}, r) \subset A$.

(ii) *Punktet* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ *kalles et* **ytre punkt** *dersom det finnes en åpen ball* $B(\mathbf{b}, r) \cap A = \emptyset$, *dvs.* $B(\mathbf{b}, r) \subset A^c$ *hvor* $A^c = \mathbb{R}^m \setminus A$ *er komplementet til* A *i* $\mathbb{R}^m$.

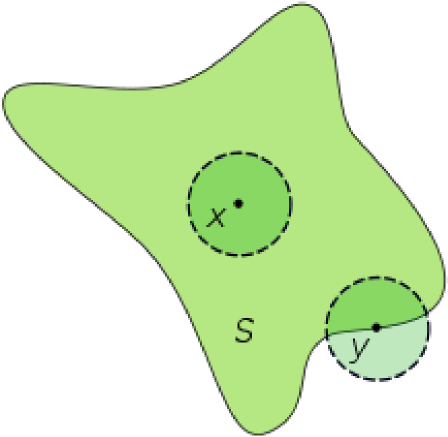
(iii) *Punktet* $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$ *kalles et* **randpunkt** *dersom enhver åpen ball* $B(\mathbf{c}, r) \subset A$ *oppfyller* $B(\mathbf{c}, r) \cap A \neq \emptyset$ *og* $B(\mathbf{c}, r) \cap A^c \neq \emptyset$. *Vi bruker notasjonen* ∂A *for mengden av randpunkter til* A

Definisjon

La $A \subset \mathbb{R}^m$.

(i) *Dersom* $\partial A \subset A$, *dvs. alle randpunkter ligger i mengden, så sier vi at mengden* A *er* **lukket**.

(ii) *Dersom* $\partial A \cap A = \emptyset$, *dvs. ingen randpunkter ligger i mengden, så sier vi at mengden* A *er* **åpen**.



x
y
S

Følger i $\mathbb{R}^n$

Definisjon

En **følge** *i* $\mathbb{R}^m$ *er en uendelig sekvens*

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots = \{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$$

av punkter $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^m$*,* $k = 1, 2, 3, \dots$.

Definisjon

Følgen $\{\mathbf{x}_k\}$ **konvergerer mot a** $\in \mathbb{R}^m$ *dersom det for alle* $\varepsilon > 0$ *finnes en* $N \in \mathbb{N}$ *slik at* $|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}| < \varepsilon$ *for alle* $n \geq N$*. Vii bruker notasjonen*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{a}$$

Anta

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}, \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbf{y}_n = \mathbf{y}$$

Da har vi

$$\lim_{n\to\infty} (c\mathbf{x}_n) = c\mathbf{x}$$

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n) = \mathbf{x} + \mathbf{y}$$

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{x}_n \cdot \mathbf{y}_n) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

Gitt $\varepsilon > 0$ og anta at $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}| < \frac{\varepsilon}{2(|\mathbf{y}|+c)}$, $|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}| < \frac{\varepsilon}{2|\mathbf{x}|} \leq c$ for $n \geq N$. Da har vi

$$|\mathbf{y}_n| = |\mathbf{y} + (\mathbf{y}_n - \mathbf{y})| \leq |\mathbf{y}| + |\mathbf{y}_n - \mathbf{y}| \leq |\mathbf{y}| + c$$

Videre har vi

$$\begin{aligned}
|\mathbf{x}_n \cdot \mathbf{y}_n - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| &= |\mathbf{x}_n \cdot \mathbf{y}_n - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_n + \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_n - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \\
&\leq |\mathbf{x}_n \cdot \mathbf{y}_n - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_n| + |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_n - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \\
&\leq |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}||\mathbf{y}_n| + |\mathbf{x}||\mathbf{y}_n - \mathbf{y}| \\
&< \frac{\varepsilon}{2(|\mathbf{y}| + c)}(|\mathbf{y}| + c) + |\mathbf{x}|\frac{\varepsilon}{2|\mathbf{x}|} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Merk: en følge av punkter i $\mathbb{R}^m$ konvergerer hvis og bare hvis den konvergerer komponentvis.

Setning

La $A \subset \mathbb{R}^m$ være en lukket mengde og $\{\mathbf{x}_n\}$ en følge i A som konvergerer mot $\mathbf{x}$. Da er $\mathbf{x} \in A$.

Bevis.

Anta $\mathbf{x} \notin A$. Siden A er lukket er komplementet åpent og det finnes en $\varepsilon > 0$ og en ball $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ slik at $B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Det betyr at avstanden fra et vilkårlig punkt i A til $\mathbf{x}$ er større enn ε. Men for $n \geq N$ har vi $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}| < \varepsilon$ og $\mathbf{x}_n \in A$. Motsigelse. $\square$

Definisjon

En funksjon $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^m$ *er kontinuerlig i punktet* $\mathbf{a} \in A$ *dersom for alle* $\varepsilon > 0$ *så finnes en* $\delta > 0$ *slik at hvis* $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$ *så er* $|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{a})| < \varepsilon$.

Setning

Funksjonen $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^m$ *er kontinuerlig i punktet* $\mathbf{a} \in A$ *dersom* $\mathbf{F}(\mathbf{x}_n) \to \mathbf{F}(\mathbf{a})$ *for* <u>*alle*</u> *følger* $\mathbf{x}_n \to \mathbf{a}$.

Eksempel

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Betrakt følgen $\mathbf{x}_n = (\frac{a}{n}, \frac{b}{n})$. *Det gir*

$$f(\mathbf{x}_n) = \frac{\frac{ab^2}{n}}{a^2 + \frac{b^4}{n^2}} \to 0$$

Se så på følgen $\mathbf{x}_n = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$. *Det gir*

$$f(\mathbf{x}_n) = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} \to \frac{1}{2} \neq 0$$

Komplettthet av $\mathbb{R}^n$

Definisjon

Delfølge:

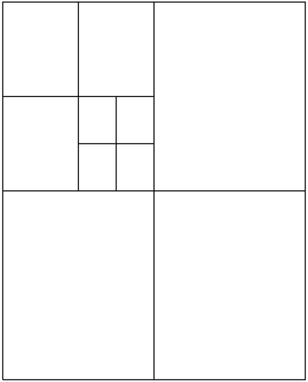
$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7, \mathbf{x}_8, \mathbf{x}_9, \ldots$$

Setning

Alle delfølger av en konvergent følge er konvergente.

Setning (Bolzano-Weierstrass)

Enhver begrenset følge i $\mathbb{R}^m$ *har en konvergent delfølge.*



Definisjon

En følge $\{\mathbf{x}_n\}$ *i* $\mathbb{R}^m$ *kalles en* **Cauchy-følge** *dersom for alle* $\varepsilon > 0$ *finnes en* $N \in \mathbb{N}$ *slik at* $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_k| < \varepsilon$ *når* $n, k \geq N$.

Setning

Enhver konvergent følge i $\mathbb{R}^m$ *er en Cauchy-følge.*

Bevis.

ANta $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ når $n \geq N$. Da har vi

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_k| &= |\mathbf{x}_n - \mathbf{x} + \mathbf{x} - \mathbf{x}_k| \\ &\leq |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}| + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_k| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$\square$

Setning

Alle Cauchy-følger i $\mathbb{R}^m$ konvergerer.

Bevis.

1. Cauchy-følger er begrenset:

$$|\mathbf{x}_n| = |\mathbf{x}_N + (\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_N)| \leq |\mathbf{x}_N| + |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_N| \leq |\mathbf{x}_N| + \varepsilon$$

2. Følgen har en konvergent delfølge.
3. Følgen konvergerer:

$$|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}| = |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n_K} + \mathbf{x}_{n_K} - \mathbf{x}| \leq |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n_K}| + |\mathbf{x}_{n_K} - \mathbf{x}| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\square$

Setning (Kompletthet av $\mathbb{R}^m$)

En følge i $\mathbb{R}^m$ konvergerer hvis og bare hvis den er en Cauchy-følge.

Eksempel

$$x_0 = 1, x_1 = 1.4, x_2 = 1.41, x_3 = 1.414, x_4 = 1.4142, x_5 = 1.41421, \dots$$

er en Cauchy-følge, menden konvergerer ikke i $\mathbb{Q}$.