MAT 1110, 8. april 2022

* Iterasjon
* Banachs fikspunktteorem

Arne B. Sletsjøe
Universitetet i Oslo

Iterasjon

Hovedproblemstilling:

Gitt en funksjon $\mathbf{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ og betrakt iterasjonen

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{F}(\mathbf{x}_0), \mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)), \mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{x}_0))), \ldots$$

Vi er interessert i å finne ut når denne følgen konvergerer mot en grense.

Funksjon $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er gitt ved

$$\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - bxy \\ cy + dxy \end{pmatrix}$$

Vi setter

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

og $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$.

Hva skjer når $n \to \infty$?

$$\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - bxy \\ cy + dxy \end{pmatrix}$$

- x: Byttedyr, y: rovdyr
- a, c: Reproduksjonsrater
- b: uttrykk for hvor hyppig byttedyr som blir spist
- d: uttrykk for økning i rovdyrpopulasjonen basert på mattilgangen

Eksempel

$$\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.01x - 3 \cdot 10^{-5}xy \\ 0.98y + 10^{-5}xy \end{pmatrix}$$

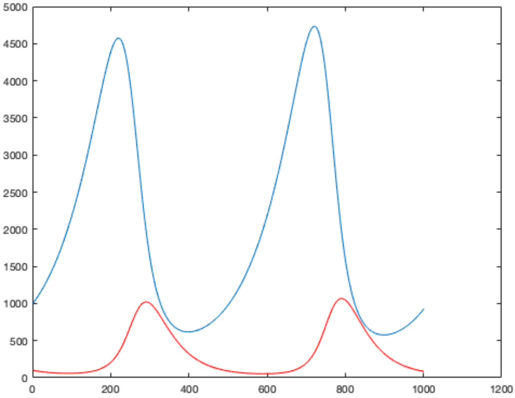
dvs.

$$x_{n+1} = 1.01x_n - 3 \cdot 10^{-5} x_n y_n$$
$$x_{n+1} = 0.98y_n + 10^{-5} x_n y_n$$

MATLAB-kode:

```
function [x,y]= byttedyr(m,k,N)
x = zeros(1,N);%med disse linjene forteller vi
y = zeros(1,N); %MATLAB at iterasjoner starter i punktet (m,k)
x(1) = m;
y(1) = k;
for n=1:N %starter løkken som utfører iterasjonene
    x(n+1) = 1.01*x(n) - 3*10.^(-5)*x(n)*y(n);
    y(n+1) = 0.98*y(n) + 10^(-5)*x(n)*y(n);
end

[x,y]=byttedyr(1000,100,1000);
plot(x)
hold on
plot(y,"r")
```



x: byttedyr, y: jeger

Definisjon

La $A \subset \mathbb{R}^m$ og $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^m$. Et punkt $\mathbf{x} \in A$ som er slik at $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ kalles et **fikspunkt** *for* $\mathbf{F}$.

Vi bruker notasjonen

$$\mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{x}))) = \mathbf{F}^{\circ 3}(\mathbf{x})$$

etc.

Eksempel

Setter $x_{n+1} = x_n = x$, $y_{n+1} = y_n = y$:

$$x = 1.01x - 3 \cdot 10^{-5}xy$$
$$x = 0.98y + 10^{-5}xy$$

som gir $x = 2000$ og $y = \frac{1000}{3}$.

Definisjon

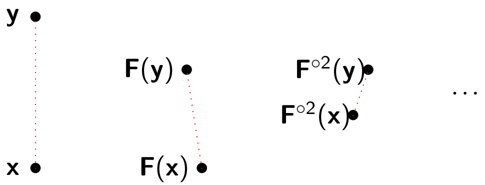
La $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^m$ *og* $\mathbf{F} : A \to A$. *Dersom det finnes et positivt tall* $C < 1$ *slik at*

$$|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})| \leq C\,|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ *sier vi at funksjonen* $\mathbf{F}$ *er en* **kontraksjon**. *Tallet* C *kalles en* **kontraksjonsfaktor** *for funksjonen.*

For en kontraksjon har vi for to vilkårlige punkter $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ at

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq |\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})| \geq |\mathbf{F}^{\circ 2}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}^{\circ 2}(\mathbf{y})| \geq \dots$$



Hjelpesetning

La $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^m$ *og* $\mathbf{F} : A \to A$ *være en kontraksjon med en kontraksjonsfaktor* C*. Da har vi*

$$|\mathbf{F}^{\circ n}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}^{\circ n}(\mathbf{y})| \leq C^n |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ *og alle positive heltall* $n \in \mathbb{N}$*.*

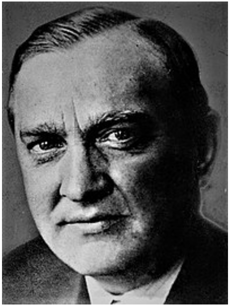
Bevis.

Bare gjenta hjelperesultatet over. $\square$

Spesielt har vi for $\mathbf{x}_n = \mathbf{F}^{\circ n}(\mathbf{x}_0)$

$$|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n| \leq C^n |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0|$$

Banachs fikspunktteorem



Stefan Banach (1892-1945), bl.a. kjent for **Banach-Tarski-paradokset**, som sier at man kan dele en ball i biter, og sette sammen bitene igjen, uten å strekke eller på noen annen måte omforme dem, slik at resultatet blir to baller, akkurat like store som den ene man startet med.

Setning (Banachs fikspunktteorem)

La $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^m$ *og* $\mathbf{F} : A \to A$ *være en kontraksjon med en kontraksjonsfaktor* C*. Da har* $\mathbf{F}$ *nøyaktig ett fikspunkt* $\mathbf{x}$ *i* A*.*

Uansett startpunkt $\mathbf{x}_0$ *så vil den itererte følgen* $\{\mathbf{F}^{\circ n}(\mathbf{x})\}$ *konvergere mot* $\mathbf{x}$ *og for alle positive heltall* $n \in \mathbb{N}$ *har vi*

$$|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}| \leq \frac{C^n}{1 - C} |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0|$$

Bevis.

Vi viser først at **F** kun kan ha ett fikspunkt. Hvis vi antar at den har to fikspunkt; **x** og **y**, så vil, etter det vi har sett over,

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}| = |\mathbf{F}(\mathbf{x})-\mathbf{F}(\mathbf{y})| \leq C|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$$

Men $C < 1$ og derfor

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}| < |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$$

som selvfølgelig er en motsigelse, med mindre $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. $\square$

Bevis.

Neste skritt er å vise at følgen $\{\mathbf{x}_j\}$ er en Cauchy-følge. La $n < k$ og $\mathbf{x}_k$ og $\mathbf{x}_n$ være to punkter i følgen. Da har vi

$$\begin{aligned}
|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_k| &= |(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n+1}) + (\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_{n+2}) + \dots + (\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}_k)| \\
&\le |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n+1}| + |\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_{n+2}| + \dots + |\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}_k| \\
&\le C^n|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0| + C^{n+1}|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0| + \dots + C^{k+1}|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0| \\
&\le (C^n + C^{n+1} + \dots + C^{k+1})|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0| \\
&\le (C^n + C^{n+1} + \dots + C^{k+1} + \dots)|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0| \\
&= \frac{C^n}{1-C}|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0| < \varepsilon
\end{aligned}$$

når n blir stor. Det betyr at følgen konverrgerer mot en $\mathbf{x} \in A$. $\square$

Bevis.

Til slutt ser vi at

$$|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_k| \leq \frac{C^n}{1-C}|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1|$$

og derfor

$$|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}| \leq \frac{C^n}{1-C}|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1|$$

$\square$

Setning (Middelverdisetningen for funksjoner i flere variable)

Anta at $f : A \to \mathbb{R}$ *er en funksjon i* m *variable som er deriverbar i et område som inneholder linjestykket* ℓ *mellom to punkter* $\mathbf{a}$ *og* $\mathbf{b}$ *i* $\mathbf{R}^m$. *Da finnes et punkt* $\mathbf{c}$ *på* ℓ *slik at*

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

Hjelpesetning

La $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^m$ *være en funksjon i m variable og anta at* $\mathbf{F}$ *er deriverbar i et område som inneholder linjestykket mellom punktene* $\mathbf{a}$ *og* $\mathbf{b}$ *i* $\mathbb{R}^m$*.Da finnes det punkter* $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m$ *på dette linjestykket slik at*

$$|\mathbf{F}(\mathbf{b}) - \mathbf{F}(\mathbf{a})| \leq |\mathbf{b} - \mathbf{a}| \sqrt{|\nabla F_1(\mathbf{c}_1)|^2 + \cdots + |\nabla F_m(\mathbf{c}_m)|^2}$$

der $F_1, F_2, \ldots, F_m$ *er komponentene til* $\mathbf{F}$*.*

Bevis.

Fra middelverdisetningen følger det at

$$F_i(\mathbf{b}) - F_i(\mathbf{a}) = \nabla F_i(\mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

og derfor

$$|F_i(\mathbf{b}) - F_i(\mathbf{a})| \leq |\nabla F_i(\mathbf{c})|\,|\mathbf{b} - \mathbf{a}|$$

og setter vi dette sammen for alle komponentene får vi

$$\begin{aligned}
|\mathbf{F}(\mathbf{b}) - \mathbf{F}(\mathbf{a})| &= \sqrt{(F_1(\mathbf{b}) - F_1(\mathbf{a})^2 + \cdots + (F_m(\mathbf{b}) - F_m(\mathbf{a}))^2} \\
&\leq \sqrt{|\nabla F_1(\mathbf{c}_1)|^2|\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2 + \cdots + |\nabla F_m(\mathbf{c}_m)^2||\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2} \\
&\leq |\mathbf{b} - \mathbf{a}|\sqrt{|\nabla F_1(\mathbf{c}_1)|^2 + \cdots + |\nabla F_m(\mathbf{c}_m)^2|}
\end{aligned}$$

$\square$

Setning

Anta $A \subset \mathbb{R}^m$ *er lukket konveks og* $\neq \emptyset$*. La* $\mathbf{F} : A \to A$ *være en avbildning, deriverbar i* A*, og anta at det finnes et tall* $C < 1$ *slik at*

$$\sqrt{|\nabla F_1(\mathbf{c}_1)|^2 + \cdots + |\nabla F_m(\mathbf{c}_m)|^2} \leq C$$

for vilkårlige punkter $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m \in A$*. Da er* $\mathbf{F}$ *en kontraksjon og har et entydig fikspunkt. Iterasjoner av* $\mathbf{F}$ *vil konvergere mot dette fikspunktet, uavhengig av startpunkt* $\mathbf{x}_0$ *i* A*.*

Eksempel

$$\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{8} - \frac{y}{2} + \frac{z}{4} + 1 \\ \frac{x}{4} + \frac{z}{4} + 2 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla F_1 = (\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$$
$$\nabla F_2 = (\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4})$$
$$\nabla F_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$$

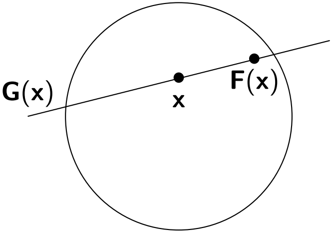
$$\sqrt{|\nabla F_1|^2 + |\nabla F_2|^2 + |\nabla F_3|^2} = \frac{\sqrt{61}}{8} < 1$$

Setning (Brouwers fikspunktteorem)

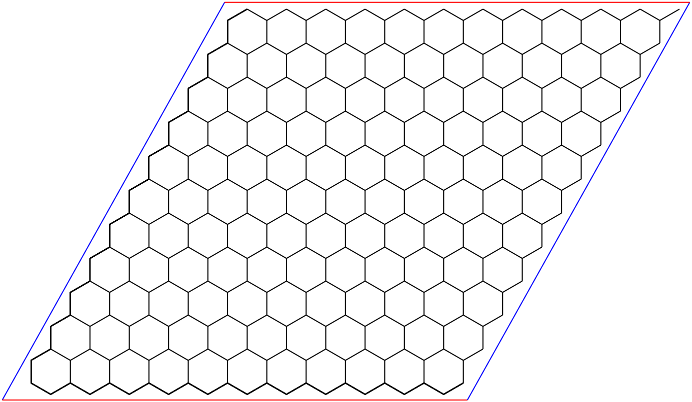
La **F** *være en kontinuerlig funksjon på den lukkede enhetsdisken i planet. Da har* **F** *et fikspunkt.*

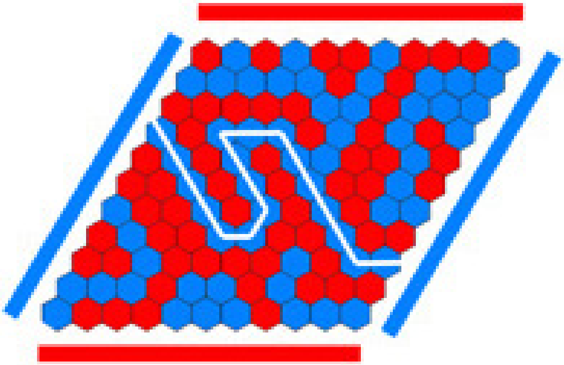
Bevis.

Anta at **F** ikke har noe fikspunkt. For hvert punkt **x** og **F**(**x**) konstruerer vi funksjonen **G** som på figuren



Det betyr at **G** er identiteten på randa til disken. Men det finnes ingen kontinuerlig funksjon fra disken inn på sirkelranda som er identiteten på randa. Motsigelse. □





Setning (Hex-teoremet)

Spillet **Hex** *kan ikke ende i uavgjort.*

Setning

Hex-teoremet er ekvivalent med Brouwers fikspunktteorem.

God Påske !