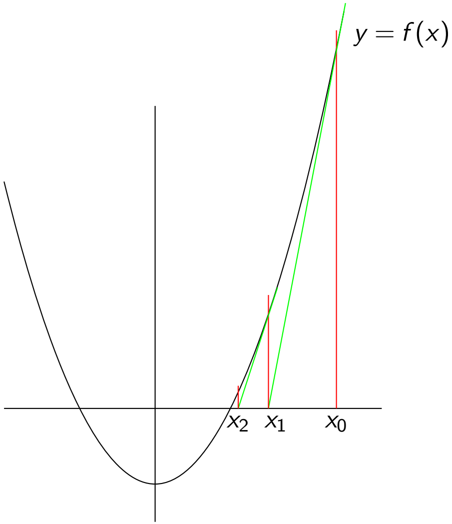
MAT 1110, 22. april 2022

∗ Newtons metode
∗ Omvendt funksjonsteorem
∗ Implisitt funksjonsteorem

Arne B. Sletsjøe
Universitetet i Oslo

Newtons metode i flere variable



$y = f(x)$
x_2
x_1
x_0

Newtons metode i en variabel

1. Vi starter med x_0 og regner ut $f(x_0)$ og $f'(x_0)$.
2. Vi trekker tangenten til f i punktet $(x_0, f(x_0))$;
   $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ eller $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
3. Vi kaller skjæringen mellom tangenten og x-aksen for x_1
4. Skjæringen er gitt ved $-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$, dvs. $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
5. Itererer prosessen: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
6. Dersom følgen konvergerer, dvs. $x_{n+1} - x_n \to 0$ betyr $f(x_n) \to 0$,
   under forutsetning av at $f'(x_n) \neq 0$

Eksempel

Funksjon $f(x) = x^2 - 1$ *med derivert* $f'(x) = 2x$. *Starter med* $x_0 = 2$, *iterasjon:*

$$x_1 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

$$x_2 = \frac{5}{4} - \frac{f(\frac{5}{4})}{f'(\frac{5}{4})} = \frac{5}{4} - \frac{\frac{9}{16}}{\frac{5}{2}} = \frac{41}{40}$$

$$x_3 = \frac{41}{40} - \frac{f(\frac{41}{40})}{f'(\frac{41}{40})} = \frac{3281}{3280}$$

Vi har $x_n \to 1$ *når* $n \to \infty$.

Newtons metode i flere variable

1. Vi starter med $\mathbf{x}_0$ og regner ut $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ og $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)$.
2. Vi finner lineariseringen til $\mathbf{F}$ i punktet $\mathbf{x}_0$;
   $T_{\mathbf{x}_0}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$
3. Vi lar $\mathbf{x}_1$ være gitt som løsningen av likningen $T_{\mathbf{x}_0}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
   $T_{\mathbf{x}_0}\mathbf{F}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{0}$
4. $T_{\mathbf{x}_0}\mathbf{F}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{0}$ gir $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ eller
   $$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$$
5. Itererer prosessen: $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{F}'(\mathbf{x}_n)^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$
6. Dersom følgen konvergerer, dvs. $|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n| \to 0$, så vil $\mathbf{F}(\mathbf{x}_n) \to \mathbf{0}$, under forutsetning av at $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n)$ er inverterbar

Eksempel

Skal løse likningssystemet

$$x^2 y + 1 = 0$$
$$e^x + y = 0$$

dvs. finne et nullpunkt for

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 y + 1 \\ e^x + y \end{pmatrix}$$

Vi regner ut Jacobi-matrisen

$$\mathbf{F}'(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ e^x & 1 \end{pmatrix}$$

Eksempel

```
function x=newtonfler(a,b,N)
    x=zeros(2,N);
    x(:,1)=[a,b];
    for n=1:N
        A=[2*x(1,n)*x(2,n)   x(1,n)^2 ; exp(x(1,n))  1];
        v=[x(1,n)^2*x(2,n)+1  ;  exp(x(1,n))+x(2,n)];
    x(:,n+1) = x(:,n)-A\v;
```

```
>> [x,y]=newtonfler(-0.7,-2.5,20);
```

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -0.7000 & y_1 &= -2.500 \\
x_2 &= -0.9323 & y_2 &= -0.3812 \\
x_3 &= -2.7167 & y_3 &= 0.3088 \\
& \vdots \\
x_{21} &= 0.7035 & y_{21} &= -2.0207
\end{aligned}
$$

Konvergens av Newtons metode

Definisjon

For en kvadratiske matrise A definerer vi **operatornormen**

$$|A| = sup\{|A\mathbf{x}| : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, |\mathbf{x}| = 1\}$$

Eksempel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}|^2 &= |\begin{pmatrix} \cos\theta - \sin\theta \\ 2\cos\theta \end{pmatrix}|^2 \\ &= 5\cos^2\theta - 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta \\ &\leq 5,236 \end{aligned}$$

dvs. $|A| \approx 2,288$

Setning (Kantorovitsj teorem)

La $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^m$ *være en deriverbar funksjon definert på en åpen, konveks delmengde* $U \subset \mathbb{R}^m$, *og anta at det finnes en konstant* M *slik at*

$$|\mathbf{F}'(\mathbf{x}) - \mathbf{F}'(\mathbf{y})| \leq M|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$. *La* $\mathbf{x}_0 \in U$, *og anta at Jacobi-matrisen* $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)$ *er inverterbar i* $\mathbf{x}_0$ *og*

$$|\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)^{-1}| \leq K$$

Anta videre at

$$\overline{B}(\mathbf{x}_0, \frac{1}{KM}) \subset U$$

Dersom

$$|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0| = |\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{1}{2KM}$$

så er $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ *inverterbar for alle* $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \frac{1}{KM})$
Dersom vi starter Newtons metode i $\mathbf{x}_0$, *så vil alle punktene* $\mathbf{x}_n$ *ligge i* $B(\mathbf{x}_0, \frac{1}{KM})$, *og de vil konvergere mot et punkt* $\mathbf{x} \in \overline{B}(\mathbf{x}_0, \frac{1}{KM})$ *der* $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Setning

Gitt alle betingelsene i Kanorovitsj teorem. Da har $\mathbf{F}$ *nøyaktig ett nullpunkt i den lukkede ballen* $\overline{B}(\mathbf{x}_0, \frac{1}{KM})$*, og det finner vi ved Newtons metode med startpunkt i* $\mathbf{x}_0$*.*

Eksempel

Som en illustrasjon skal vi bruke Kantorovitsj teorem på funksjonen $f(x) = x - \cos x$. *Vi starter iterasjonen med* $x_0 = 0$.

1. *Middelverdisetningen brukt på intervallet* $[x, y]$ *gir at det finnes en* $x \leq c \leq y$ *slik at*

   $$|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}| = |f'(c) = |1 + \sin c| \leq 2$$

   dvs. $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$ *med* $M = 2$.
2. $f'(x_0) = f'(0) = 1$, *og vi setter* $K = 1$.
3. $f'(x_0)^{-1} f(x_0) = -1$, *så* $x_1 = x_0 - f'(x_0)^{-1} f(x_0) = 0 - (-1) = 1$ *og*

   $$|x_1 - x_0| = 1 > \frac{1}{2KM} = \frac{1}{4}$$

   Kantorovitsj funker ikke !!

Eksempel

Gjentar, men starter iterasjonen med $x_1 = 1$.

1. *Fortsetter med* $M = 2$.
2. $f'(x_1) = f'(1) = 1 + \sin 1 \geq 1 + 1 - \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$, *som betyr at den inverse er mindre enn* $\frac{6}{11}$. *Så vi setter* $K = \frac{6}{11}$.
3. *Vi har*

$$|x_2 - x_1| = |f'(1)^{-1} f(1)| \leq \frac{6}{11}(1 - \cos 1) \leq \frac{6}{11}\frac{1}{2} = \frac{3}{11} \leq \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot \frac{6}{11}} = \frac{11}{24}$$

4. $1 + \sin x$ *er inverterbar i* $B(1, \frac{11}{12})$.
5. *Kantorovitsj sikrer at iterasjonen konvergerer mot løsningen av* $x - \cos x = 0$. *Newtons metode gir*

$$x_\infty \approx 0,73908513$$

Omvendte funksjonsteorem

$D_{\mathbf{F}}$: **Definisjonsmengden** til **F**

$V_{\mathbf{F}} = \{\mathbf{F}(\mathbf{x}) \,|\, \mathbf{x} \in D_{\mathbf{F}}\}$: **Verdimengden** til **F**

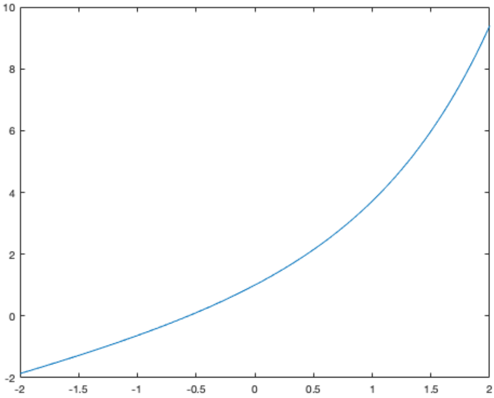
Definisjon

Funksjonen $\mathbf{F} : D_{\mathbf{F}} \to V_{\mathbf{F}}$ *er* **injektiv** *dersom for hver* $\mathbf{y} \in V_{\mathbf{F}}$ *finnes en entydig* $\mathbf{x} \in D_{\mathbf{F}}$ *slik at* $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$*.*

I så tilfelle er **den omvendte funksjonen** $\mathbf{G} : V_{\mathbf{F}} \to D_{\mathbf{F}}$ *gitt ved* $\mathbf{G}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$*. Vi skriver gjerne* $\mathbf{G} = \mathbf{F}^{-1}$*.*

$$y = f(x) = e^x + x$$

Kan vi løse ut x med hensyn på y?



Setning (Omvendt funksjonsteorem)

La $U \subset \mathbb{R}^m$ være en åpen mengde og anta at $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^m$ har kontinuerlige partiellderiverte. La $\bar{\mathbf{x}} \in U$ og anta at $\mathbf{F}'(\bar{\mathbf{x}})$ er inverterbar. Da finnes en omegn $\bar{\mathbf{x}} \in U_0 \subset U$ slik at $\mathbf{F}$ restriktert til U_0 er injektiv, og en omvendt funksjon med Jacobi-matrise

$$\mathbf{G}'(\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}})) = \mathbf{F}'(\bar{\mathbf{x}})^{-1}$$

Eksempel

$$\mathbf{F}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} e^{x_1} + x_2 \\ x_2 \cos x_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

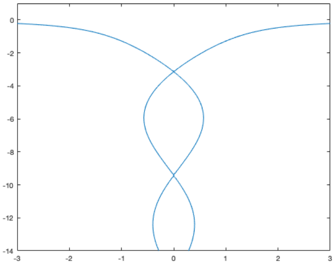
$$\mathbf{F}'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} e^{x_1} & 1 \\ -x_2 \sin x_1 & \cos x_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}'(0,0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Implisitt funksjonsteorem

$$f(x,y) = x^2 y + \cos y + 1 = 0$$



$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - \sin y$$

Setning (Implisitt funksjonsteorem)

La $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$ være en åpen mengde og anta at $f : U \to \mathbb{R}$ har kontinuerlige partiellderiverte. La $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{y}) \in U$ slik at $f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{y}) = 0$. Anta at $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{y}) \neq 0$. Da finnes en omegn U_0 om $\bar{\mathbf{x}}$ og en entydig funksjon $g : U_0 \to \mathbb{R}$ slik at for hver $\mathbf{x} \in U_0$ har vi

$$f(\bar{\mathbf{x}}, g(\bar{\mathbf{x}})) = 0 \quad og \quad g(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{y}$$

Funksjonen $g : U_0 \to \mathbb{R}$ er deriverbar og

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{\mathbf{x}}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{\mathbf{x}}, g(\bar{\mathbf{x}}))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{\mathbf{x}}, g(\bar{\mathbf{x}}))}$$

Bevis.

Anta at vi har funnet en funksjon g slik at $f(\bar{\mathbf{x}}, g(\bar{\mathbf{x}})) = 0$. Partiell derivasjon mhp x_i gir

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{\mathbf{x}}, g(\bar{\mathbf{x}})) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{\mathbf{x}}, g(\bar{\mathbf{x}}))\frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{\mathbf{x}}, g(\bar{\mathbf{x}})) = 0$$

som gir formelen i setningen.

For å vise eksistensen av funksjonen lar vi for enkelhets skyld $m = 1$. $\square$

Bevis.

Definer en ny funksjon

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix}$$

med Jacobi-matrise

$$\mathbf{F}'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Determinanten i punktet $(\overline{x}, \overline{y})$ er

$$\det(\mathbf{F}'(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y}) \neq 0$$

og ved omvendte funksjonsteoremet finnes det en omvendt funksjon $\mathbf{G}$ definert på en åpen mengde $V \subset \mathbb{R}^2$ som inneholder $\mathbf{F}(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{x}, f(\overline{x}, \overline{y}))$. $\square$

Bevis.

Siden

$$\mathbf{G}(\mathbf{F}(x,y)) = \mathbf{G}(\begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

kan vi vise at $\mathbf{G}$ må være på formen

$$\mathbf{G}(x,z) = \begin{pmatrix} x \\ h(x,z) \end{pmatrix}$$

hvor $f(x, h(x,z)) = z$. Setter vi inn $z = 0$ får vi $f(x, h(x,0)) = 0$, og vi lar $g(x) = h(x,0)$. Det betyr at

$$f(x, g(x)) = 0 \quad \text{for alle } x \in U_0$$

og at g er entydig med denne egenskapen. $\square$

Eksempel

La $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. *Da har vi*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \neq 0 \quad \textit{for } y \neq 0$$

På en åpen mengde i øvre halvplan kan vi invertere funksjonen

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

og vi får

$$\mathbf{G}(x,z) = \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{z + 1 - x^2} \end{pmatrix}$$

Vi setter

$$g(x) = \sqrt{0 + 1 - x^2} = \sqrt{1 - x^2}$$

hvor $f(x, g(x)) = x^2 + (\sqrt{1 - x^2})^2 - 1 = x^2 + (1 - x^2) - 1 = 0.$