MAT 1110, 29. april 2022

∗ Lagranges multiplikatormetode

Arne B. Sletsjøe
Universitetet i Oslo

Litt repetisjon

Setning (Ekstremalverdisetningen)

La A være en lukket, begrenset delmengde av $\mathbb{R}^m$, og $f : A \to \mathbb{R}$ en kontinuerlig funksjon. Da har f maks- og min-punkter og er følgelig begrenset på A.

Definisjon

Et punkt $\mathbf{a} \in A$ *kalles et* **stasjonært punkt** *for* $f : A \to \mathbb{R}$ *gradienten* $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$.

Setning

Et ekstremalpunkt i det indre av definisjonsområdet til en funksjon med kontinuerlige partiellderiverte vil være stasjonært.

Merk. Det motsatte er ikke tilfelle, stasjonære punkter trenger ikke å være ekstramalpunkter.

Definisjon

Et stasjonært punkt $\mathbf{a} \in A$ *som ikke er et ekstremalpunkt kalles et* **sadelpunkt**.

Setning

La $\mathbf{a}$ *være et stasjonært punkt for en funksjon* f *i* m *variable med kontinuerlige annenordens partiellderiverte i en omegn om* $\mathbf{a}$*. Da har vi*

(i) *Hvis alle egenverdiene til* $Hf(\mathbf{a})$ *er positive, så er punktet* $\mathbf{a}$ *et lokalt minimumspunkt.*

(ii) *Hvis alle egenverdiene til* $Hf(\mathbf{a})$ *er negative, så er punktet* $\mathbf{a}$ *et lokalt maksimumspunkt.*

(iii) *Hvis noen av egenverdiene til* $Hf(\mathbf{a})$ *er positive og noen er negative, så er punktet* $\mathbf{a}$ *et sadelpunkt.*

Hvis noen av egenverdiene til $Hf(\mathbf{a})$ *er 0, så gir ikke testen noe resultat.*

Setning

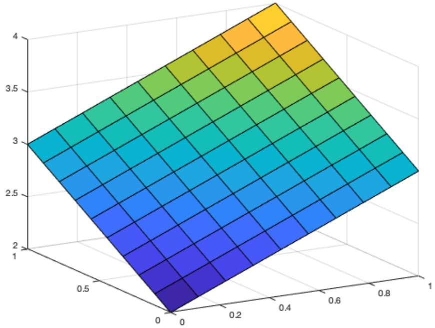
La $f(x, y)$ *være en to ganger deriverbar funksjon i to variable og anta at* (a, b) *er et kritisk punkt for* f*. La videre* $Df(a, b) = \det(Hf(a, b))$ *Da har vi*

- *Dersom* $D(a, b) > 0$ *og* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$, *så er* (a, b) *et lokalt minimumspunkt.*
- *Dersom* $D(a, b) > 0$ *og* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$, *så er* (a, b) *et lokalt maksimumspunkt.*
- *Dersom* $D(a, b) < 0$, *så er* (a, b) *et sadelpunkt.*
- *Dersom* $D(a, b) = 0$ *sier ikke denne testen oss noe.*

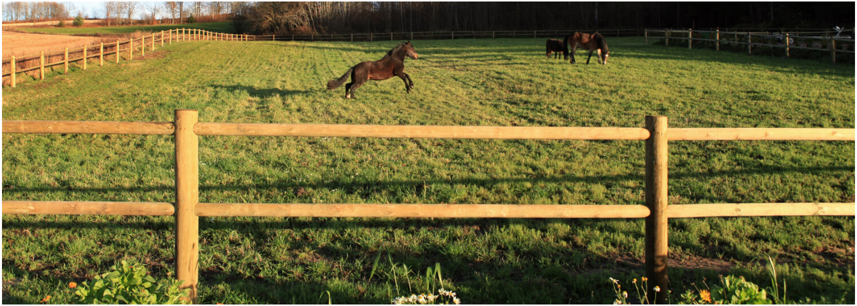
Eksempel

La $f(x,y) = x + y + 2$. *Vi skal finne maksimumsverdien til* $f(x,y)$ *på enhetskvadratet* $[0,1] \times [0,1]$.

De partielt deriverte til funksjonen er konstanter og det finnes derfor ikke noen lokale ekstremalpunkter inne i det indre av området. Det er enkelt å se at når x og y ligger mellom 0 og 1, så vil funksjonen ligge mellom 0 og 4. Det betyr at dette også er globale maksimums- og minimums-verdier.



Lagranges multiplikatormetode



Arealet av et rektangel med sidekanter x og y er gitt ved $A(x,y) = xy$, og vi se på hvordan dette endrer seg når omkretsen $2x + 2y = C$ skal være konstant. Vi kan løse likningen $2x + 2y = C$ med hensyn på variablen y og sette dette inn i uttrykket for $A(x,y)$. Det gir oss

$$y = \frac{C}{2} - x$$

som vi setter inn i arealfunksjonen;

$$\tilde{A}(x) = A(x, \frac{C}{2} - x) = x(\frac{C}{2} - x) = \frac{C}{2}x - x^2$$

Deriverer vi dette uttrykket og setter det lik 0, får vi

$$\frac{C}{2} - 2x = 0$$

som betyr $x = \frac{C}{4}$ og dermed $y = \frac{C}{2} - \frac{C}{4} = \frac{C}{4}$. Det vil si at de to sidekantene er like lange og vi har et kvadrat. Mao. kvadratet er det av rektanglene med konstant omkrets som har størst areal.

Vi kan vi se på dette på en annen måte. Sett $g(x,y) = 2x + 2y - C$. Vi skal finne ekstremalpunktene til areal-funksjonen $A(x,y)$ under **bibetingelsen** $g(x,y) = 0$. For å løse $g(x,y) = 0$ med hensyn på y gjør vi som i implisitt funksjonsteorem, og får y som en funksjon i x. Vi kaller denne funksjonen $y = h(x) = \frac{C}{2} - x$. Da har vi at arealet er gitt ved

$$\tilde{A}(x) = A(x,y) = A(x,h(x))$$

Bruker vi kjerneregelen på denne funksjonen og setter svaret lik 0 for å finne ekstremalpunktene, får vi

$$\begin{aligned}\tilde{A}'(x) &= \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial A}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \cdot h'(x) = 0\end{aligned}$$

Det er også en nær sammenheng mellom partielt deriverte av $g(x,y)$ og den deriverte av $h(x)$.

Siden $h(x)$ er definert ved at $\tilde{g}(x) = g(x, h(x)) = 0$ får vi igjen ved å bruke kjerneregelen og at den deriverte av 0 er 0,

$$\begin{aligned}\tilde{g}'(x) &= \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot h'(x) = 0\end{aligned}$$

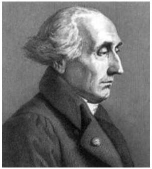
Kombinerer vi de to likningene og eliminerer $h'(x)$ får vi

$$\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

(som er det samme som at ∇A og ∇g er parallelle) og samtidig skal vi ha $g(x,y) = 0$. I vårt eksempel gir dette de to likningene

$$2y - 2x = 0, \quad 2x + 2y = C$$

som igjen gir $x = y = \frac{C}{2}$.



Lagranges
metode har navnet sitt fra den italiensk-franske matematikeren **Joseph Louis Lagrange** (italiensk Giuseppe Lodovico Lagrangia) (1736-1813).

Definisjon

La $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *være en deriverbar funksjon i* n *variable.* **Gradienten** $\nabla f(P)$ *til* f *i punktet* $P = (a_1, \ldots, a_n)$ *er vektoren*

$$\nabla f(P) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P))$$

Symbolet ∇ kalles **nabla**. Det
fikk navnet sitt av skotten William Robertson Smith, som var filolog, fysiker, arkeolog og bibelkritiker. Han mente symbolet lignet på en assyrisk harpe, nebela, derav navnet. Symbolet ble først brukt om gradienten av William Rowan Hamilton.

Setning (Lagranges multiplikatormetode)

La $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *være to funksjoner i* n *variable med kontinuerlige partiellderiverte. Anta at* $P \in \mathbb{R}^n$ *er et ekstremalpunkt for funksjonen* f *på nivåmengden*

$$g(x_1, \ldots, x_n) = C$$

for et reelt tall C*. Anta videre at* $\nabla g(P) \neq 0$*. Da finnes det et reelt tall* λ *slik at*

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$$

Eksempel

I eksemplet er $f(x,y) = xy$ *og* $g(x,y) = 2x + 2y$. *Vi beregner gradientene ved å regne ut alle partiellderiverte,*

$$\nabla f(x,y) = (y,x) \quad \nabla g(x,y) = (2,2)$$

For en konstant C *sier nå teoremet at det finnes et reelt tall* λ *slik at*

$$(y,x) = \lambda(2,2)$$

Eksempel

Det betyr at $y = \lambda \cdot 2$ *og* $x = \lambda \cdot 2$*. Samtidig må vi huske på at vi kun er interessert i punkter som oppfyller* $2x + 2y = C$*. Vi elimiminerer* λ *fra de to likningene over og får*

$$\lambda = \frac{y}{2} = \frac{x}{2}$$

eller $x = y$*. Vi utelukker tilfellene* $x = 0$ *og* $y = 0$ *som gir areal lik 0. Dermed står vi igjen med to likninger*

$$x = y \quad og \quad 2x + 2y = C$$

Siden vi kun er interessert i positive størrelser betyr dette at $x = y = \frac{C}{2}$ *som er det samme som vi fant tidligere.*

Eksempel

Vi skal finne ekstremalverdiene for funksjonen $f(x,y) = 2x + 4y$ *under bibetingelsen* $x^2 + y^2 = 4$*, altså på en sirkel med sentrum i origo og radius 2. Vi regner ut de to gradientene*

$$\nabla f = (2,4) \quad og \quad \nabla g = (2x, 2y)$$

Lagrange-likningen

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

gir

$$2 = \lambda \cdot 2x, \quad 4 = \lambda \cdot 2y$$

eller $(x,y) = (\frac{1}{\lambda}, \frac{2}{\lambda})$*. Nå må vi huske at vi leter etter punkter på sirkelen, dvs. punkter som oppfyller* $x^2 + y^2 = 4$.

Eksempel

Innsetting gir

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 = 4$$

eller

$$5 = 4\lambda^2$$

som betyr at $\lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$*, og for ekstremalpunktene;*

$$(x, y) = \pm\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{2}{\lambda}\right) = \pm\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

Vi regner ut funksjonsverdien til f *i de to punktene og får*

$$f\left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}, \pm\frac{4}{\sqrt{5}}\right) = \pm\left(2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + 4 \cdot \frac{4}{\sqrt{5}}\right) = \pm\frac{20}{\sqrt{5}} = \pm 4\sqrt{5}$$

som gir oss største og minste verdi av f *over sirkelen.*

Eksempel

Vi skal finne ekstremalpunkter til funksjonen $f(x, y, z) = xyz$ *når summen av koordinatene er 1, dvs. vi har bibetingelsen* $g(x, y, z) = x + y + z = 1$*. Først regner vi ut de to gradientene*

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = (yz, xz, xy)$$

og

$$\nabla g = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}) = (1, 1, 1)$$

Eksempel

Vi setter opp Lagrange-likningen

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

som i dette tilfellet gir oss tre likninger

$$yz = \lambda \cdot 1, \; xz = \lambda \cdot 1, \; xy = \lambda \cdot 1$$

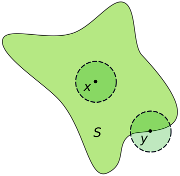
som gir $yz = xz = xy$. *En mulig løsning er at to av koordinatene er 0, f.eks.* $x = y = 0$. *Det gir funksjonsverdien* $f(0,0,z) = 0$. *For alle de tre punktene* $(0,0,1)$, $(0,1,0)$ *og* $(1,0,0)$ *er funksjonen lik 0, men i en liten omegn om punktene finner vi positive såvel som negative funksjonsverdier. Punktene er derfor sadelpunkter.*

Eksempel

Hvis at ingen av koordinatene er 0, kan vi forkorte og det følger at $x = y = z$*. Nå bruker vi at punktet vi har funnet skal oppfylle bibetingelsen, dvs.* $g(x,y,z) = x + y + z = 1$*, som gir oss løsningen* $x = y = z = \frac{1}{3}$*. Setter vi inn i funksjonen finner vi verdien*

$$f(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{27}$$

som er større enn 0. Det betyr at dette er et lokalt maksimumspunkt for funksjonen.



Anta at vi har gitt en funksjon f definert over et lukket område V i planet og at vi er interessert i å finne ekstremalpunktene til funksjonen over dette området. Framgangsmåten er at vi først regner ut de kritiske punktene til funksjonen og lokaliserer hvilke (om noen) av disse som ligger i **det indre** av V. Dette gjør vi ved å regne ut de partielt deriverte og sette alle lik 0. Da har vi fått noen kandidater til maksimums- og minimumspunkter for funksjonen. Det indre av området er alt som ikke ligger på **randa** ∂V av V. Så bruker vi Lagranges metode på randa ∂V, og finner nye kandidater til ekstremalverdier. For å finne de globale ekstremalverdiene sammenlikner vi resultatene og plukker ut største og minste verdi.

Eksempel

Vi skal finne største og minste verdi av funkskjonen $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy + 1$ *over sirkelskiven*

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Vi partiellderiverer f *og setter svarene lik 0;*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y - x = 0$$

Dette gir oss et kritisk punkt i $(0,0)$*. For å finne ut hva slags punkt dette er bruker vi andre-derivert-testen. De partielle andre-deriverte er gitt ved*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$$

Eksempel

og vi får

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2 = 9$$

og siden $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$ *er dette et minimumspunkt, med verdi* $f(0,0) = 1$*.*
Så går vi til randa og Lagranges metode. Vi har allerede regnet ut de partiellderiverte for f*, så vi kan enkelt skrive opp gradienten*

$$\nabla f = (2x - y, 4y - x)$$

Vi regner ut gradienten til g *og finner*

$$\nabla g = (2x, 2y)$$

Eksempel

For et ekstremalpunkt skal vi kunne finne et reelt tall λ slik at

$$\nabla f = \lambda \cdot \nabla g$$

eller

$$(2x - y, 4y - x) = \lambda \cdot (2x, 2y)$$

Det gir oss likningene

$$2x - y = 2x\lambda \quad 4y - x = 2y\lambda$$

Vi løser ut med hensyn på λ og får

$$\lambda = \frac{2x - y}{2x} = \frac{4y - x}{2y}$$

som gir relasjonen $x^2 - 2xy - y^2 = 0$. Vi bruker at punktene skal ligge på randa ∂V, dvs. oppfylle $x^2 + y^2 = 1$. I dette tilfellet viser det seg å være svært hensiktsmessig å gå over til polarkoordinater.

Eksempel

Vi setter $x = r\cos\theta$ *og* $y = r\sin\theta$. *Det gir*

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy - y^2 &= r^2\cos^2\theta - 2r\cos\theta\, r\sin\theta - r^2\sin^2\theta \\ &= r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta - 2\cos\theta\sin\theta) \\ &= r^2(\cos 2\theta - \sin 2\theta) = 0 \end{aligned}$$

Bibetingelsen gir i dette eksemplet $r = 1$. *Dermed blir løsningen gitt ved de* θ *som er slik at* $\cos 2\theta = \sin 2\theta$. *Det er tilfelle for* $2\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ *og* $2\theta_2 = \frac{5\pi}{4}$, *dvs.* $\theta_1 = \frac{\pi}{8}$ *og* $\theta_2 = \frac{5\pi}{8}$. *For disse vinklene har vi*

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

og

$$\cos\frac{5\pi}{4} = \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Eksempel

Verdien i disse punktene er gitt ved

$$\begin{aligned} f(\cos\theta_i, \sin\theta_i) &= \cos^2\theta_i + 2\sin^2\theta_i - \cos\theta_i \sin\theta_i + 1 \\ &= 1 + \sin^2\theta_i - \cos\theta_i \sin\theta_i + 1 \\ &= 2 + \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta_i) - \frac{1}{2}\sin 2\theta_i \\ &= 2 + \frac{1}{2}(1 - \pm\frac{\sqrt{2}}{2}) - \pm\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{5}{2} \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Det betyr at maksimumsverdien for funksjonen over området V er $\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$, som vi finner på randa, og minimumsverdein er 1, som vi finner i det indre kritiske punktet. Minimumsverdien på randa er $\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} > 1$ som derfor ikke er minimumsverdien.

Lagranges multiplikatormetode med flere bibetingelser

Setning

La $U \subset \mathbb{R}^m$ *og* $f, g_1, g_2, \ldots, g_k : U \to \mathbb{R}$ *funksjoner med kontinuerlige partiellderiverte. Dersom* $b_1, b_2, \ldots, b_k$ *er reelle tall og* $\mathbf{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots \overline{x}_m)$ *er et ekstremalpunkt for* f *på mengden*

$$A = \{\mathbf{x} \in U \,|\, g_1(\mathbf{x}) = b_1, g_1(\mathbf{x}) = b_1, \ldots, g_1(\mathbf{x}) = b_1\}$$

så er enten $\nabla g_1(\overline{\mathbf{x}}), \nabla g_2(\overline{\mathbf{x}}), \ldots, \nabla g_k(\overline{\mathbf{x}})$ *lineært avhengige, eller så finnes* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *slik at*

$$\nabla f(\overline{\mathbf{x}}) = \lambda_1 \nabla g_1(\overline{\mathbf{x}}) + \lambda_2 \nabla g_2(\overline{\mathbf{x}}) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(\overline{\mathbf{x}})$$

Eksempel

Minimer $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ *under bibetingelsene*

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ -x + y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

Gradientene:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \quad \nabla g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \nabla g_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Eksempel

Vi skal løse

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

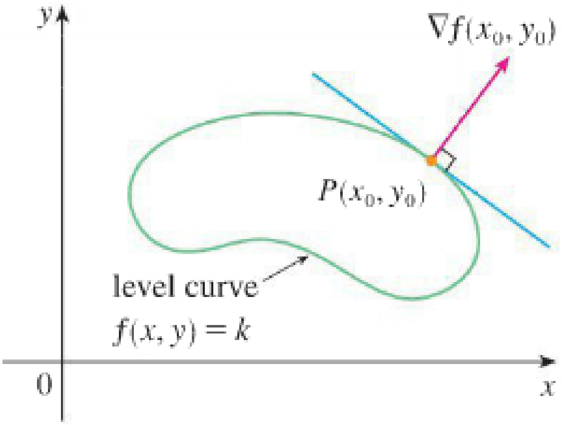
under bibetingelsene, dvs.

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda_1 - \lambda_2 \\ 2y &= 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ 2z &= -\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{aligned}$$

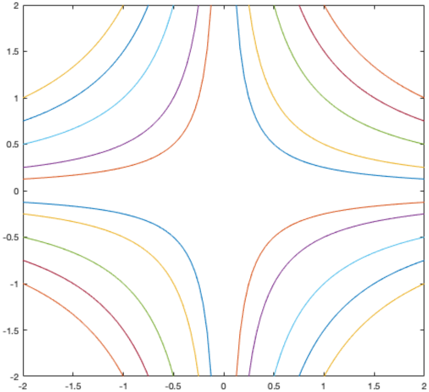
$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ -x + y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

som gir $\lambda_1 = \frac{26}{35}$, $\lambda_2 = \frac{16}{35}$. $x = \frac{1}{7}$, $y = \frac{34}{35}$ *og* $z = \frac{3}{35}$.

Et geometrisk "bevis"

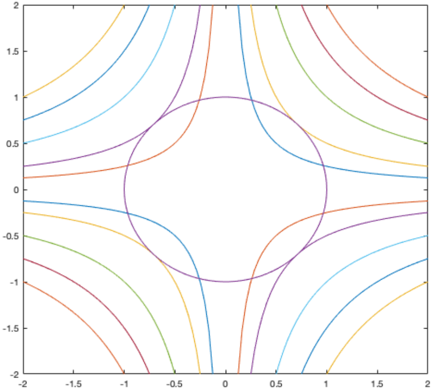


Husk at gradienten står normalt på nivåkurvene.



Grafen til forskjellige nivåkurver for funksjonen $f(x, y) = xy$. I første kvadrant har vi

$$\text{blå} < \text{gul} < \text{grønn} < \text{rød} < \text{oransj}$$



Vi skal finne maksimum av funksjonen $f(x, y) = xy$ over sirkelen $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Vi observerer at det er i punktene der kurvene tangerer, dvs. der gradientene er parallelle.