MAT 1110, 2. mai 2022

* Gradientmetoden
* Rekker
* Konvergenstester

Arne B. Sletsjøe
Universitetet i Oslo

Litt repetisjon

Setning (Lagranges multiplikatormetode)

La $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *være to funksjoner i* n *variable med kontinuerlige partiellderiverte. Anta at* $P \in \mathbb{R}^n$ *er et ekstremalpunkt for funksjonen* f *på nivåmengden*

$$g(x_1, \ldots, x_n) = C$$

for et reelt tall C*. Anta videre at* $\nabla g(P) \neq 0$*. Da finnes det et reelt tall* λ *slik at*

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$$

Setning

La $U \subset \mathbb{R}^m$ *og* $f, g_1, g_2, \ldots, g_k : U \to \mathbb{R}$ *funksjoner med kontinuerlige partiellderiverte. Dersom* $b_1, b_2, \ldots, b_k$ *er reelle tall og* $\mathbf{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots \overline{x}_m)$ *er et ekstremalpunkt for* f *på mengden*

$$A = \{\mathbf{x} \in U \,|\, g_1(\mathbf{x}) = b_1, g_1(\mathbf{x}) = b_1, \ldots, g_1(\mathbf{x}) = b_1\}$$

så er enten $\nabla g_1(\overline{\mathbf{x}}), \nabla g_2(\overline{\mathbf{x}}), \ldots, \nabla g_k(\overline{\mathbf{x}})$ *lineært avhengige, eller så finnes* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *slik at*

$$\nabla f(\overline{\mathbf{x}}) = \lambda_1 \nabla g_1(\overline{\mathbf{x}}) + \lambda_2 \nabla g_2(\overline{\mathbf{x}}) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(\overline{\mathbf{x}})$$

Eksempel

Minimer $f(x, y, z) = x^3 + 3y^2 + z$ *under bibetingelsene*

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ -x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \end{aligned}$$

Gradientene:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 6y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \nabla g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla g_2 = \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Eksempel

Vi skal løse

$$\begin{pmatrix} 3x^2 \\ 6y \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

under bibetingelsene, dvs.

$$\begin{aligned} 3x^2 &= \lambda_1 - 2\lambda_2 x \\ 6y &= \lambda_1 + 2\lambda_2 y \\ 1 &= 2\lambda_2 z \end{aligned}$$

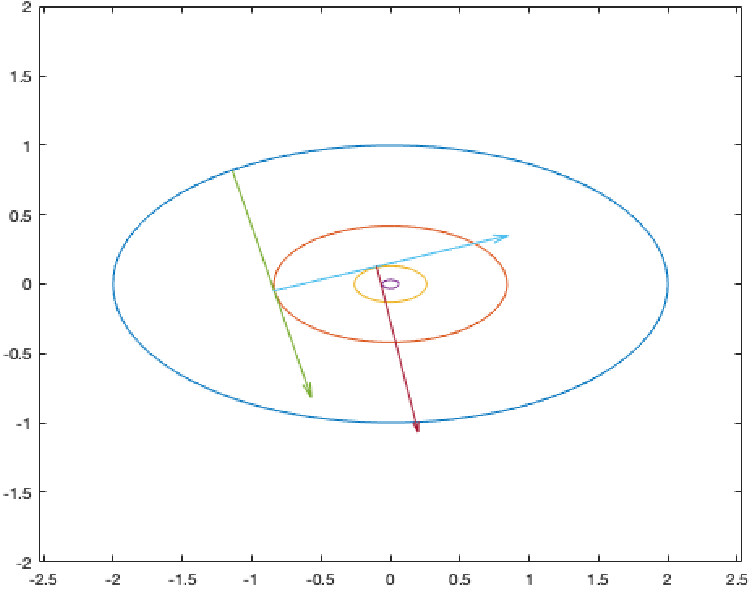
$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ -x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \end{aligned}$$

som gir minste verdi (etter litt regning) $f(0,0,-1) = -1$.

Gradientmetoden

Problem: Finn lokalt ekstremalpunkt for funksjonen $f(\mathbf{x})$ (når vanlig derivasjonsmetode feiler)

Ide: Vi starter i et punkt $\mathbf{x}_0$ i nærheten av maksimumspunktet (eller minimumspunktet) og regner ut gradienten i punktet. Gradienten peker i den retningen der funksjonen øker mest. Følg denne retningen et lite stykke, til et nytt punkt $\mathbf{x}_1$, og gjenta. Forhåpentligvis bringer dette oss nærmere maksimumspunktet.


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5

1. Velg et punkt $\mathbf{x}_0$.
2. Regn ut gradienten $\nabla f(\mathbf{x}_0)$.
3. Sett $\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}_0 + \nabla f(\mathbf{x}_0)t$, en parametrisering av linja fra $\mathbf{x}_0$ langs gradienten.
4. Sett dette inn i uttrykket for f; $g(t) = f(\mathbf{r}(t))$, dette gir en funksjon i en variabel
5. Vi leter etter den største verdien av funksjonen langs denne linja ved å regne ut $g'(t) = 0$.

$$g'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = \nabla f(\mathbf{x}_0 + \nabla f(\mathbf{x}_0)t) \cdot \nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$$

6. Løser denne med hensyn på t, og kaller løsningen t_0.
7. Regner ut

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \nabla f(\mathbf{x}_0)t_0$$

   og gjentar prosessen.

For å finne minimum erstatter vi uttrykket $\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}_0 + \nabla f(\mathbf{x}_0)t$ med $\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}_0 - \nabla f(\mathbf{x}_0)t$

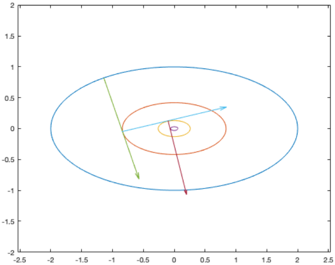
Eksempel

Vi skal finne minimum for $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ *og starter med* $\mathbf{x}_0 = (-1.14, 0.82)$. *Gradienten til funksjonen er* $\nabla f(x,y) = (2x, 8y)$. *Det gir*

$$\begin{aligned} g'(t) &= \nabla f((-1.14, 0.82) - (-2.28, 6.56)t) \cdot (-2.28, 6.56) \\ &= \nabla f(-1.14 + 2.28t, 0.82 - 6.56t) \cdot (-2.28, 6.56) \\ &= (-2.28 + 4.56t, 6.56 - 52.48t) \cdot (-2.28, 6.56) = 0 \end{aligned}$$

som gir $t_0 = 0.136$ *og*

$$\mathbf{x}_1 = (-1.14, 0.82) - 0.136(-2.28, 6.56) = (-0.83, -0.07)$$



Rekker

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots$$

Hva betyr dette?

$$1,\ 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},\ \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{13}{15},\ \frac{13}{15} - \frac{1}{7} = \frac{76}{105}, \dots \to \frac{\pi}{4}$$

eller

$$1, 0.6667, 0.8667, 0.7238, 0.8349, 0.7440, \dots \to 0.7854$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

Notasjonen er litt misvisende, for det ser ut som en uendelig rekke er en uendelig sum. Uendelige summer finnes ikke. Den uendelige rekka er ikke en sum, men en grense av endelige summer, hvor vi etter hvert legger til flere og flere ledd;

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} (a_0 + a_1 + \cdots + a_k)$$

Definisjon

En rekke $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergerer mot et tall* s *dersom følgen* $\{S_k\}$ *av* **delsummer**

$$S_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_k$$

konvergerer mot s*, dvs.* $\forall \varepsilon > 0$*, så* $\exists N \in \mathbb{N}$ *slik at*

$$|S_k - s| < \varepsilon \quad \textit{når} \quad k \geq N$$

En rekke som ikke konvergerer sies å **divergere***.*

Eksempel

$$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \dots \to \pi$$

Rekka konvergerer

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

Rekka divergerer

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \to 2$$

Geometrisk rekke som konvergerer

Definisjon

Rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n a_0$$

kalles den **geometriske rekka** *med* **første ledd** a_0 *og* **kvosient** r.

Eksempel

Rekka

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$$

er en geometrisk rekke med første ledd $a_0 = 1$ *og kvosient* $r = \frac{1}{2}$.

Setning

La $a_0 \neq 0$. Den geometriske rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n a_0$$

konvergerer hvis $|r| < 1$ og divergerer hvis $|r| \geq 1$. Hvis $|r| < 1$ så konvergerer rekka mot

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n a_0 = \frac{a_0}{1-r}$$

Bevis.
La

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} r^n a_0$$

være delsummen. Da har vi

$$rS_k = S_k + a_0 r^{k+1} - a_0$$

og derfor

$$S_k = a_0 \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r}$$

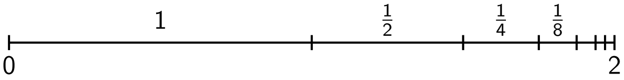
Dersom $|r| < 1$ vil $\lim_{k\to\infty} r^{k+1} = 0$ og vi får

$$S_\infty = a_0 \frac{1}{1 - r}$$

$\square$

Eksempel

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$



Eksempel

$$\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots=\frac{9}{10}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{10})^n=\frac{9}{10}\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=1$$

dvs.

$$0,999999\cdots=1$$

Eksempel

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots = e = 2.718281828459045\ldots$$

Denne rekka konvergerer fort;

$$1,\ 2,\ 2.5,\ 2.6667,\ 2.7083,\ 2.7167,\ldots$$

Setning (Divergenstesten)

Hvis rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

konvergerer, så må $a_n \to 0$ når $n \to \infty$. Ekvivalent, dersom a_n ikke går mot 0, så vil rekka divergere.

Bevis.

Hvis rekka konvergere vil begge delsummene

$$S_{n-1} = \sum_{n=0}^{n-1} a_n \quad \text{og} \quad S_n = \sum_{n=0}^{n} a_n$$

gå mot samme grense s. Vi har $a_n = S_n - S_{n-1}$ og $a_n \to s - s = 0$. $\square$

Definisjon

Rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

kalles den harmoniske rekka.

Setning

Den harmoniske rekka divergerer.

Bevis.

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots &= 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \dots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \to \infty \end{aligned}$$

$\square$

Setning

La $\sum a_n$ og $\sum b_n$ være to konvergente rekker og $c \in \mathbb{R}$ et reelt tall. Da konvergerer også

$$\sum (a_n + b_n) \quad \text{og} \quad \sum c a_n$$

Hvis minst en av de to rekkene divergerer, så vil summen også divergere.

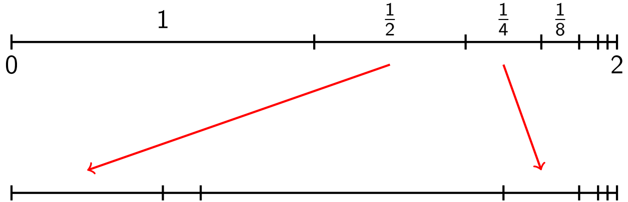
Merk at vi kan starte en rekke på andre verdier enn $n = 0$, men for konvergens er startpunktet uvesentlig; De to rekkene

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{og} \quad \sum_{n=k}^{\infty} a_n$$

vil enten begge konvergere eller begge divergere. Forskjellen mellom dem er kun et endelig tall.

Rekker med kun positive ledd

For en rekke med kun positive ledd spiller ikke rekkefølgen på leddene noen rolle;



Vi sier at en rekke er begrenset dersom absoluttverdien av alle delsummene er begrenset, dvs. at det finnes et tall M slik at

$$|\sum_{k=0}^{n} a_k| \leq M \quad \text{for alle } n$$

Setning

En rekke med kun positive ledd (en positiv rekke) konvergerer hvis og bare hvis den er begrenset.

Bevis.

Voksende følger konvergerer hvis og bare hvis de er begrenset. $\square$

Eksempel

Betrakt rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}$$

Siden

$$\frac{1}{(n+1)2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

har vi

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+1)2^n} \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} \leq 2$$

Det betyr at rekken er begrenset og derfor konvergent.

Konvergenstester

Overlapper med forelesning fredag 6. mai

Konvergenstester:

1. Integraltesten
2. Sammenlikningstesten
3. Grensesammenlikningstesten
4. Forholdstesten
5. Rottesten

Setning (Integraltesten)

La $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ *være en positiv, kontinuerlig og avtagende funksjon. Da har vi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \quad \textit{konvergerer} \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx \quad \textit{konvergerer}$$

Korollar

Rekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *konvergerer hvis og bare hvis* $p > 1$*.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

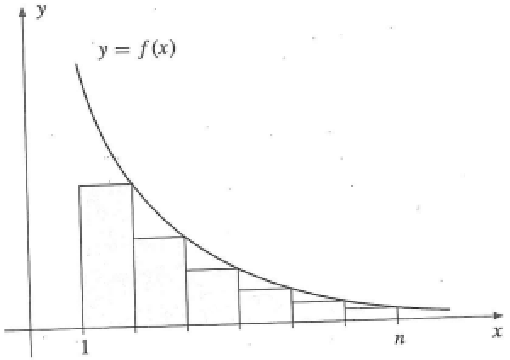
divergerer, mens

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1,0001}} = 1 + \frac{1}{2^{1,0001}} + \frac{1}{3^{1,0001}} + \dots$$

konvergerer.

Bevis.

Anta integralet konvergerer.



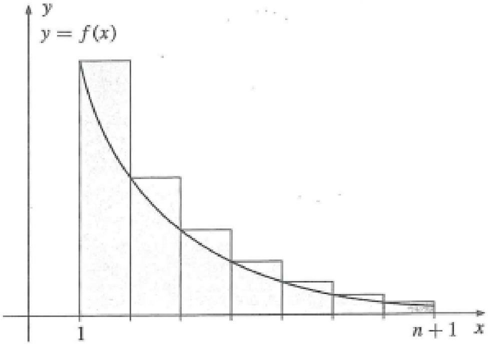
,

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq M$$

$\square$

Bevis.

Anta integralet divergerer.



,

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

□

Eksempel

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

Konvergent eller divergent?

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx = \lim_{t\to\infty} [\ln(\ln x)]_2^t = \lim_{t\to\infty} (\ln(\ln t) - \ln(\ln 2)) = \infty$$

Divergent.

Eksempel

$$\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n^2}$$

Konvergent eller divergent?

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}[-\frac{1}{2}e^{-x^2}]_0^t = \lim_{t\to\infty}(-\frac{1}{2}e^{-t^2} + \frac{1}{2}e^{-0^2}) = \frac{1}{2}$$

Konvergent.

Setning (Sammenlikningstesten)

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *og* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *være to positive rekker.*

(i) *Anta* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergerer og at vi kan finne et tall* c *slik at* $b_n \leq ca_n$ *for alle* n. *Da konvergerer* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *også.*

(ii) *Anta* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *divergerer og at vi kan finne et tall* d *slik at* $b_n \geq da_n$ *for alle* n. *Da divergerer* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *også.*

Bevis.

Dersom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er begrenset, så er også $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n$ og den **majorerer** $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Samme type argument (motsatt vei) for divergens. □

Eksempel

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^4-5}$$

Konvergent eller divergent?

$$\frac{n^2+2}{n^4-5} < 2\frac{n^2+2}{n^4}$$

fordi

$$n^4 < 2(n^4-5) \quad \mathit{for} \quad n \geq 2$$

Men

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^4} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^4}$$

Konvergent.

Setning (Grensesammenlikningstesten)

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *og* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *være to positive rekker.*

(i) *Anta* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergerer og at*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} < \infty$$

Da konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *også.*

(ii) *Anta* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *divergerer og at*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} > 0$$

Da divergerer $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *også.*

Bevis.
(i)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} < \infty$$

betyr at det finnes en N slik at for $n \geq N$ så er $\frac{b_n}{a_n} < M+1$, eller $b_n \leq (M+1)a_n$.

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = M > 0$$

betyr at det finnes en N slik at for $n \geq N$ så er $\frac{b_n}{a_n} > \frac{M}{2}$, eller $b_n \geq \frac{M}{2} a_n$. $\square$

Eksempel

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2+4n}{8n^4-2}$$

Konvergent eller divergent?

$$\frac{3n^2+4n}{8n^4-2} = \frac{n^2}{n^4} \cdot \frac{3+4\frac{1}{n}}{8-2\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{3+\frac{4}{n}}{8-\frac{2}{n^4}}$$

og

$$\frac{\frac{3n^2+4n}{8n^4-2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{3+\frac{4}{n}}{8-\frac{2}{n^4}}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{3+\frac{4}{n}}{8-\frac{2}{n^4}} \to \frac{3}{8}$$

Konvergent.

Setning (Forholdstesten)

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *være en positive rekke og anta at grensen*

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

eksisterer (eller er ∞*). Da har vi*

(i) *Hvis* $a < 1$, *konvergens.*

(ii) *Hvis* $a > 1$, *divergens.*

(iii) *Hvis* $a = 1$, *ingen konklusjon.*

Bevis.

(i) La $a < r < 1$. Da har vi for store n, dvs. alle $n \geq N$ at $a_{n+1} < ra_n$. Det betyr at

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=N}^{\infty} r^{n-N} a_N$$

som konvergerer.

(ii) La $a > 1$. Da har vi for store n, dvs. alle $n \geq N$ at $a_{n+1} > a_n$ og leddene i rekken vokser. Da vil den divergere. $\square$

Eksempel

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Konvergent eller divergent?

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \to \frac{1}{2}$$

Konvergent etter forholdstesten.

Eksempel

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Konvergent eller divergent?

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{\frac{(n+1)}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{1}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \to \frac{1}{e}$$

Konvergent etter forholdstesten.

Setning (Rottesten)

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *være en positive rekke og anta at grensen*

$$a = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}}$$

eksisterer (eller er ∞*). Da har vi*

(i) *Hvis* $a < 1$, *konvergens.*

(ii) *Hvis* $a > 1$, *divergens.*

(iii) *Hvis* $a = 1$, *ingen konklusjon.*

Bevis.
(i) La $a < r < 1$. Da har vi for store n, dvs. alle $n \geq N$ at $(a_n)^{\frac{1}{n}} < r$. Det betyr at

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=N}^{\infty} r^n$$

som konvergerer.

(ii) La $a > 1$. Da har vi for store n, dvs. alle $n \geq N$ at $(a_n)^{\frac{1}{n}} > 1$, altså $a_n > 1$ og leddene i rekken vokser. Da vil den divergere. $\square$

Vi har

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$

Bevis.

La $n^{\frac{1}{n}} = 1 + a_n$, dvs.

$$n = (1+a_n)^n = 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2}a_n^2 + \dots$$

Siden alle leddene er positive må vi ha spesielt

$$n \geq \frac{n(n-1)}{2}a_n^2$$

eller

$$a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0$$

når $n \to \infty$. $\square$

Eksempel

La $a > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$$

Rottesten:

$$\left(\frac{a^n}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a}{n^{\frac{1}{n}}} \to a > 1$$

når $n \to \infty$.