MAT 1110, 6. mai 2022

∗ Konvergenstester
∗ Alternerende rekker
∗ Absolutt og betinget konvergens

Arne B. Sletsjøe
Universitetet i Oslo

Konvergenstester

Konvergenstester:

1. Integraltesten
2. Sammenlikningstesten
3. Grensesammenlikningstesten
4. Forholdstesten
5. Rottesten

Setning (Integraltesten)

La $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ være en positiv, kontinuerlig og avtagende funksjon. Da har vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \quad \textit{konvergerer} \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx \quad \textit{konvergerer}$$

Korollar

Rekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergerer hvis og bare hvis $p > 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

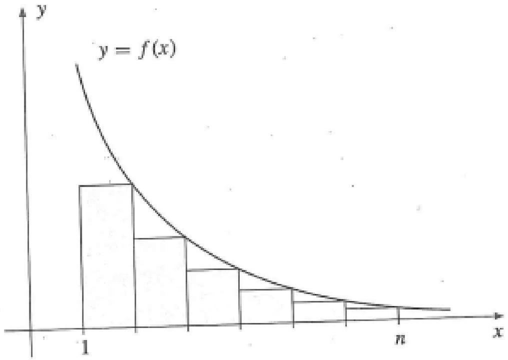
divergerer, mens

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1,0001}} = 1 + \frac{1}{2^{1,0001}} + \frac{1}{3^{1,0001}} + \dots$$

konvergerer.

Bevis.

Anta integralet konvergerer.



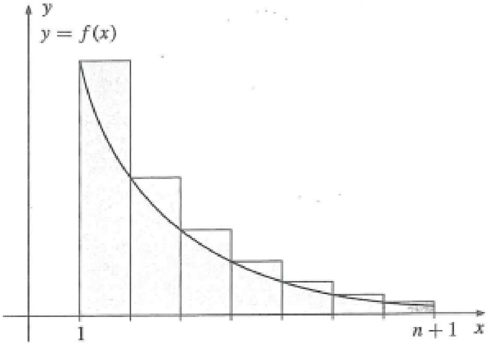
,

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_{1}^{n} f(x)\,dx \leq M$$

$\square$

Bevis.

Anta integralet divergerer.



,

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

$\square$

Eksempel

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

Konvergent eller divergent?

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx = \lim_{t\to\infty} [\ln(\ln x)]_2^t = \lim_{t\to\infty} (\ln(\ln t) - \ln(\ln 2)) = \infty$$

Divergent.

Eksempel

$$\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n^2}$$

Konvergent eller divergent?

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}[-\frac{1}{2}e^{-x^2}]_0^t = \lim_{t\to\infty}(-\frac{1}{2}e^{-t^2} + \frac{1}{2}e^{-0^2}) = \frac{1}{2}$$

Konvergent.

Setning (Sammenlikningstesten)

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ være to positive rekker.

(i) *Anta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer og at vi kan finne et tall c slik at $b_n \leq ca_n$ for alle n. Da konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ også.*

(ii) *Anta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergerer og at vi kan finne et tall d slik at $b_n \geq da_n$ for alle n. Da divergerer $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ også.*

Bevis.

Dersom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er begrenset, så er også $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n$ og den **majorerer** $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Samme type argument (motsatt vei) for divergens. □

Eksempel

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^4-5}$$

Konvergent eller divergent?

$$\frac{n^2+2}{n^4-5} < 2\frac{n^2+2}{n^4}$$

fordi

$$n^4 < 2(n^4-5) \quad \textit{for} \quad n \geq 2$$

Men

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^4} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^4}$$

Konvergent.

Setning (Grensesammenlikningstesten)

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *og* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *være to positive rekker.*

(i) *Anta* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergerer og at*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} < \infty$$

Da konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *også.*

(ii) *Anta* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *divergerer og at*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} > 0$$

Da divergerer $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *også.*

Bevis.
(i)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} < \infty$$

betyr at det finnes en N slik at for $n \geq N$ så er $\frac{b_n}{a_n} < M+1$, eller $b_n \leq (M+1)a_n$.
(ii)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = M > 0$$

betyr at det finnes en N slik at for $n \geq N$ så er $\frac{b_n}{a_n} > \frac{M}{2}$, eller $b_n \geq \frac{M}{2} a_n$. $\square$

Eksempel

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2+4n}{8n^4-2}$$

Konvergent eller divergent?

$$\frac{3n^2+4n}{8n^4-2} = \frac{n^2}{n^4} \cdot \frac{3+4\frac{1}{n}}{8-2\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{3+\frac{4}{n}}{8-\frac{2}{n^4}}$$

og

$$\frac{\frac{3n^2+4n}{8n^4-2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{3+\frac{4}{n}}{8-\frac{2}{n^4}}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{3+\frac{4}{n}}{8-\frac{2}{n^4}} \to \frac{3}{8}$$

Konvergent.

Setning (Forholdstesten)

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *være en positive rekke og anta at grensen*

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

eksisterer (eller er ∞*). Da har vi*

(i) *Hvis* $a < 1$, *konvergens.*

(ii) *Hvis* $a > 1$, *divergens.*

(iii) *Hvis* $a = 1$, *ingen konklusjon.*

Bevis.

(i) La $a < r < 1$. Da har vi for store n, dvs. alle $n \geq N$ at $a_{n+1} < ra_n$. Det betyr at

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=N}^{\infty} r^{n-N} a_N$$

som konvergerer.

(ii) La $a > 1$. Da har vi for store n, dvs. alle $n \geq N$ at $a_{n+1} > a_n$ og leddene i rekken vokser. Da vil den divergere. $\square$

Eksempel

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Konvergent eller divergent?

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \to \frac{1}{2}$$

Konvergent etter forholdstesten.

Eksempel

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Konvergent eller divergent?

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{\frac{(n+1)}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{1}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \to \frac{1}{e}$$

Konvergent etter forholdstesten.

Setning (Rottesten)

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *være en positive rekke og anta at grensen*

$$a = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}}$$

eksisterer (eller er ∞*). Da har vi*

(i) *Hvis* $a < 1$, *konvergens.*

(ii) *Hvis* $a > 1$, *divergens.*

(iii) *Hvis* $a = 1$, *ingen konklusjon.*

Bevis.

(i) La $a < r < 1$. Da har vi for store n, dvs. alle $n \geq N$ at $(a_n)^{\frac{1}{n}} < r$. Det betyr at

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=N}^{\infty} r^n$$

som konvergerer.

(ii) La $a > 1$. Da har vi for store n, dvs. alle $n \geq N$ at $(a_n)^{\frac{1}{n}} > 1$, altså $a_n > 1$ og leddene i rekken vokser. Da vil den divergere. $\square$

Vi har

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$

Bevis.

La $n^{\frac{1}{n}} = 1 + a_n$, dvs.

$$n = (1+a_n)^n = 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2}a_n^2 + \dots$$

Siden alle leddene er positive må vi ha spesielt

$$n \geq \frac{n(n-1)}{2}a_n^2$$

eller

$$a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0$$

når $n \to \infty$. $\square$

Eksempel

La $a > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$$

Rottesten:

$$\left(\frac{a^n}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a}{n^{\frac{1}{n}}} \to a > 1$$

når $n \to \infty$.

Alternerende rekker

Definisjon

En rekke $\sum a_n$ *kalles* **alternerende** *dersom to påfølgende ledd alltid har motsatte fortegn.*

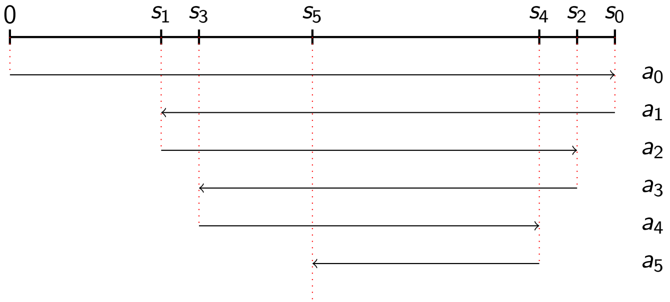
Eksempel

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

Setning

En alternerende rekke $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *der* $|a_n|$ *er avtagende og går mot 0 konvergerer.*

Bevis.



Delsummene $s_1, s_3, s_5, \ldots$ danner en voksende og oppad begrenset følge som konvergerer mot s_{odde}, mens delsummene $s_0, s_2, s_4, \ldots$ danner en avtagende og nedad begrenset følge som konvergerer mot s_{jevn}. Siden $s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n} \to 0$ vil $s_{odde} = s_{jevn}$. □

Eksempel

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Her har vi

$$|a_n| = |\frac{(-1)^{n+1}}{n}| = \frac{1}{n} \to 0$$

og leddene er avtagende.

Absolutt og betinget konvergens

Definisjon

Rekka $\sum a_n$ **konvergerer absloutt** *dersom* $\sum |a_n|$ *konvergerer.*

Setning

En absolutt konvergent rekke er alltid konvergent.

Bevis.

Vi skriver $\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$ hvor vi har delt opp i positive og negative ledd. (Teknisk sett erstatter vi de negative leddene i den positive rekka med 0, og tilsvarende for de positive i den negative rekka. I tillegg lar vi $a_n^- = -a_n$) Vi har derfor

$$0 \leq a_n^+ \leq |a_n| \quad \text{og} \quad 0 \leq a_n^- \leq |a_n|$$

Sammenlikningskriteriet gir at de to rekkene (positive ledd og negative ledd) konvergerer mot s^+ og s^-. Rekka vi startet med vil dermed konvergere mot $s^+ - s^-$. □

Definisjon

En konvergent rekke som ikke er absolutt konvergent kalles **betinget konvergent**.

Eksempel

Rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *er betinget konvergent siden den alternerende harmoniske rekka konvergerer, mens den harmoniske rekka (bare positive ledd) divergerer.*

Setning (Forholdstesten for generelle rekker)

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *være en rekke og anta at grensen*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a$$

eksisterer (eller er ∞*). Da har vi*

(i) *Hvis* $a < 1$*, konvergrere rekka absolutt.*

(ii) *Hvis* $a > 1$*, divergerer rekka.*

(iii) *Hvis* $a = 1$*, ingen konklusjon.*

Setning (Rottesten for generelle rekker)

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *være en rekke og anta at grensen*

$$a = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

eksisterer (eller er ∞*). Da har vi*

(i) *Hvis* $a < 1$*, konvergrere rekka absolutt.*

(ii) *Hvis* $a > 1$*, divergerer rekka.*

(iii) *Hvis* $a = 1$*, ingen konklusjon.*

Setning

La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *være en konvergent, positiv rekke med sum (grenseverdi)* s*. Da er også ethvert ombytte av* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent med sum* s*.*

Bevis.

Ved et ombytte vil alle leddene få et nytt nummer. For et naturlig tall N betrakter vi delmengden

$$\{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_k\} \subset \{1, 2, 3, \ldots, N\}$$

som etter ombyttet fortsatt ligger i $\{1, 2, 3, \ldots, N\}$. Siden alle leddene er positive har vi

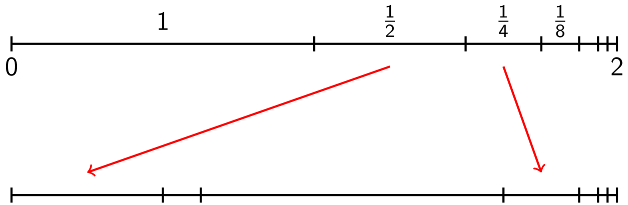
$$\sum_{j=1}^{k} a_{i_j} \leq \sum_{n=1}^{N} a_n$$

og derfor

$$t = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} a_{i_j} \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = s$$

Merk at de to uendelige rekkene inneholder alle de samme leddene.

Siden den opprinnelige rekka er en ombytting av den ombyttede, gjelder også dette argumentet motsatt vei, dvs. $s \leq t$, med andre ord $s = t$. $\square$



1
1/2
1/4
1/8
0
2

Setning

La $\sum a_n$ være en absolutt konvergent rekke med sum (grenseverdi) s. Da er også ethvert ombytte av $\sum a_n$ absolutt konvergent med sum s.

Bevis.

Siden rekken er absolutt konvergent vil både den negative og den positive delsummen konvergere. De to delsummene består kun av positive ledd (husk at $a_n^- = -a_n$). Delsummene er de samme for en ombytting av rekka, og siden ombyttinger av positive rekker ikke endrer på konvergens vil den ombyttede rekka også konvergere mot samme grense. $\square$

Hjelpesetning

Dersom $\sum a_n$ er betinget konvergent divergerer både $\sum a_n^+$ og $\sum a_n^-$.

Bevis.

Vi har $a_n^+ = \frac{1}{2}(a_n + |a_n|)$ og $a_n^- = \frac{1}{2}(|a_n| - a_n)$ som betyr at i begge tilfeller vil rekkene være en sum av en konvergent og en divergent rekke. $\square$

Setning

La $\sum a_n$ være en betinget konvergent rekke. For ethvert tall a finnes det en ombytting $\sum b_n$ av $\sum a_n$ som konvergerer mot a.

Bevis.

Vi bruker at $\sum a_n^+$ og $\sum a_n^-$ begge divergerer. Det innebærer at vi kan få så stort tall vi bare vil ved å legge sammen tilstrekkelig antall ledd. Vi skriver opp den ombyttede rekka etter følgende oppskrift:

(i) Sett $b_0 = a_0$.

(ii) Dersom $b_0 < a$, la $b_1 = a_{i_1}$ være det neste leddet i rekka slik at $a_{i_1} \geq 0$. Dersom $b_0 \geq a$, la $b_1 = a_{i_1}$ være det neste leddet i rekka slik at $a_{i_1} < 0$.

(iii) Erstatt b_0 med $b_0 + b_1 + \cdots + b_{k-1}$ og gjenta (ii) for å bestemme b_k.

Divergensen av de to delrekkene tvinger denne prosessen til å konvergere mot a. □

Eksempel

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Skal ombytte slik at resultatet blir 1:

$$1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} - \frac{1}{7} + \frac{1}{17} + \frac{1}{21} - \frac{1}{11} + \frac{1}{25} + \frac{1}{29} - \frac{1}{15} + \dots$$

Delsummene blir:

$$1, 0.6667, 0.8667, 0.9778, 1.0547, 0.9118, 0.9707,$$
$$1.0183, 0.9274, 0.9674, 1.0019, 0.9352, \dots$$