MAT 1110, 9. mai 2022

∗ Rekker av funksjoner
∗ Regning med potensrekker

Arne B. Sletsjøe
Universitetet i Oslo

Rekker av funksjoner

Definisjon

Vi kaller

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k(x)$$

(der $v_k(x)$ er funksjoner) for en **rekke av funksjoner**.

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} v_k(x)$$

kalles den **n-te delsummen** *til rekka.*

For hvert valg av $x = a$ vil rekka av funksjoner $\sum_{k=0}^{\infty} v_k(x)$ gå over til å bli en vanlig rekke $\sum_{k=0}^{\infty} v_k(a)$ av tall.

Definisjon

Vi sier at rekka konvergerer **punktvis** *mot en funksjon* ν *dersom*

$$\lim_{k\to\infty} \nu_k(a) \to \nu(a)$$

for alle $a \in A$ *(i definisjonsområdet).*

Vi sier at rekka konvergerer **uniformt** *mot en funksjon* ν *på området* A *dersom for alle* $\varepsilon > 0$ *så finnes en* $N \in \mathbb{N}$ *slik at hvis* $n \geq N$ *så er* $|\sum_{k=0}^{n} \nu_k(x) - \nu(x)| < \varepsilon$ *for alle* $x \in A$

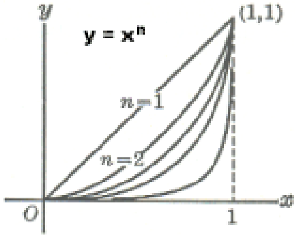
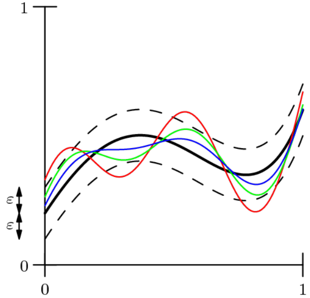


Fig. 2



Illustrasjon av punktvis (til venstre) og uniform (til høyre) konvergens.

Setning (Weierstrass M-test)

La

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k(x)$$

være en rekke av funksjoner definert på en mengde A. Anta at det finnes en konvergent rekke av tall $\sum M_n$ slik at

$$|v_k(a)| \leq M_k$$

for alle k og $a \in A$. Da konvergerer rekka $\sum_{k=0}^{\infty} v_k(x)$ uniformt og absolutt på A.

Bevis.

(i) For hver $a \in A$ domineres rekka av en konvergent rekke, noe som innebærer punktvis konvergens.

(ii) Velg $\varepsilon > 0$. Siden rekka $\sum M_k$ konvergerer, finnes det en $N \in \mathbb{N}$ slik at

$$|\sum_{k=n}^{\infty} M_k| < \varepsilon$$

når $n \geq N$. Det betyr at

$$|v(a) - s_n(a)| = |\sum_{k=n}^{\infty} v_k(a)| \leq |\sum_{k=n}^{\infty} M_k| < \varepsilon$$

□

Eksempel

Rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

konvergerer uniformt på intervallet $[-1,1]$ *fordi for alle* $x \in [-1,1]$ *har vi*

$$\frac{|x^n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

og høyresiden gir en konvergent rekke.

Eksempel

Betrakt rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Ved forholdstesten har vi

$$\left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right| = \frac{n}{n+1}|x| \to |x|$$

når $n \to \infty$*. Det betyr konvergens for* $|x| > 1$ *og divergens for* $|x| < 1$*. For* $x = 1$ *får vi den harmoniske rekka som divergerer, mens vi for* $x = -1$ *får den alternerende harmoniske rekka. Det gir* **konvergensområde** $[-1, 1)$*.*

Definisjon

La

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k(x)$$

være en rekke av funksjoner definert på en mengde A. Den største delmengden $D \subset A$ slik at rekka konvergerer for alle $x \in D$ kalles rekkas **konvergensområde**.

Definisjon

En **potensrekke** *er en rekke på formen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

eller den enklere formen når $a = 0$*:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

I mange tilfeller kan vi finne en kompakt funksjon som er lik en potensrekke, i det minste innenfor et visst definisjonsområde.

Eksempel

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots$$

Eksempel

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1+x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots = e^x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots = \ln x$$

Setning (Konvergens av potensrekker)

For en potensrekke

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

har vi følgende muligheter:

(i) *Potensrekken konvergerer for alle* x.

(ii) *Potensrekken konvergerer bare for* $x = a$.

(iii) *Det finnes et tall* r *slik at konvergensrekken konvergerer absolutt for alle* x *slik at* $|x-a| < r$ *og divergerer for* $|x-a| > r$

Definisjon

Tallet r *i punkt (iii) i Setningen over kalles* **konvergensradien** *til potensrekken.*

Eksempel

Gitt en rekke

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

Ved forholdstesten får vi siden

$$\left|\frac{(n+2)x^{n+1}}{(n+1)x^n}\right| = \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}|x| \to |x|$$

når $n \to \infty$ *at konvergensradiusen er* $r = 1$. *For* $x = 1$ *får vi rekka* $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)$ *som opplagt divergerer, mens vi for* $x = -1$ *får rekka* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)$ *som også divergerer (siden leddene ikke går mot 0).*

Eksempel

Gitt en rekke

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2 2^n}$$

Ved forholdstesten får vi siden

$$\left| \frac{\frac{(x+3)^{n+1}}{(n+1)^2 2^{n+1}}}{\frac{(x+3)^n}{n^2 2^n}} \right| = \left| \frac{n^2(x+3)}{2(n+1)^2} \right| \to \left| \frac{x+3}{2} \right|$$

når $n \to \infty$ *så konvergerer rekka dersom* $|x+3| < 2$, *dvs.* $-5 < x < -1$.
For $x = -1$ *får vi rekka*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2)^n}{n^2 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1n^2$$

som konvergerer, mens vi for $x = -5$ *får rekka*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

som også konvergerer (begge etter p-testen). Konvergensområde $[-5, -1]$.

Eksempel

Gitt en rekke

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Vi har

$$\left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right| \to 0$$

når $n \to \infty$. *Det betyr at rekka konvergerer for alle* x, *dvs. hele* $\mathbb{R}$.

Eksempel

Gitt en rekke

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$$

Vi har

$$\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = |(n+1)x| \to \infty$$

når $n \to \infty$. *Det betyr at rekka konvergerer for* $x = 0$

Hjelpesetning

Anta at potensrekka $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *konvergerer for* $x = b$. *Da konvergerer rekka absolutt for alle* x *slik at* $|x| < |b|$. *Vi har uniform konvergens på ethvert intervall* $[-c, c]$ *der* $0 < c < |b|$.

Bevis.

Konvergens av $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n$ betyr at $a_n b^n \to 0$ for store n, og vi kan finne en K slik at $|a_n b^n| < K$ for alle n. Det gir for $0 < c < |b|$ og $x \in [-c, c]$

$$|a_n x^n| = |a_n b^n| \left| \frac{c}{b} \right|^n \leq K \left(\frac{c}{|b|} \right)^n \to 0$$

når $n \to \infty$. Ved Weierstrass konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uniformt og absolutt på $[-c, c]$. Siden alle x med $|x| < b$ ligger i et slikt intervall $[-c, c]$, så har vi absolutt konvergens for alle slike x. $\square$


$-b$
$-c$
c
b

Bevis.

(for teorem 12.6.1) Anta at vi kan finne x_1 slik at rekka konvergerer og en x_2 slik at rekka divergerer. Da har vi konvergens for alle $0 \leq x \leq |x_1|$ og divergens for alle $x > |x_2|$. Vi lar A være mengde av alle x slik at rekka konvergerer. Denne mengden er ikke-tom og oppad begrenset. Vi lar r være den minste øvre skranken for A. Da har vi $|x_1| \leq r \leq |x_2|$.

La $|x| < r$. Da kan vi finne $|x| < b < r$ og lemmaet gir at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergerer absolutt.

Anta så at $|x| > r$, og anta at rekka $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergerer. Da kan vi finne $r < y < |x|$ slik at rekka konvergerer. Motsigelse siden r er en øvre skranke for A. □

Setning (Kontinuitet av potensrekker)

Hvis potensrekka $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *har konvergensradius* r*, så er funksjonen*

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

kontinuerlig på det åpne intervallet $(a-r, a+r)$.

Setning (Abels teorem)

Summen til en potensrekke $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *er kontinuerlig i hele konvergensområdet sitt.*

Regning med potensrekker

Setning (Integrasjon av potensrekker)

Anta at potensrekken

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

har konvergensradius r*. Da er*

$$\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$$

for alle $a - r < x < a + r$.

Setning (Derivasjon av potensrekker)

Anta at potensrekken

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

har konvergensradius r*. Da er* f *deriverbar for alle* $a - r < x < a + r$ *og*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$$

Bevisene for de to setningene følger av at vi har uniform konvergens på lukkede intervaller som ligger inne i konvergensområdet. For delsummer $s_N(x)$ er derivasjons- og integrasjonsformelene uproblematiske, og uniform konvergens sikrer at vi kan gjøre grenseovergangene når $N \to \infty$. Siden alle x i det indre av konvergensområdet også ligger i et lukket intervall følger resultatene.

De to resultatene sier at vi kan derivere, eller integrere, ledd for ledd i det indre av konvergensområdet. Det kan imidlertid skje ting i endepunktene. Tommelfingerregelen er at vi kan miste konvergens når vi deriverer, og vinne konvergens når vi integrerer.

Eksempel

Rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots$$

konvergerer for $0 < x \leq 2$. *I det indre av konvergensintervallet har vi*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^x (-1)^{n-1}(t-1)^{n-1}\,dt \\
&= \int_1^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(t-1)^{n-1} \right) dt \\
&= \int_1^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (1-t)^n \right) dt \\
&= \int_1^x \frac{1}{1-(1-t)}\,dt \\
&= \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln x
\end{aligned}$$

Eksempel

Setter vi inn $x = 2$ *får vi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(2-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots$$

Setter vi inn $x = 2$ *i det kompakte uttrykket får vi* $\ln 2$*. Det vil si at vi har*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots = \ln 2$$

Eksempel

Vi kan se på rekka

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Vi har

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}$$

Integrerer vi begge sider får vi på venstre side

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\, dt = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} = [\arctan t]_0^x = \arctan x$$

Rekka konvergerer for $x = 1$, *noe som gir*

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots$$

Setning (Produkt av potensrekker)

La $= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *og* $= \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ *være to potensrekker hvor den minste konvergensradien er* r. *Da konvergerer produktet av de to rekkene*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

hvor

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

Eksempel

Produktet

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n\right) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-x^2}$$

Vi har for n odde:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + \cdots + 1 \cdot 1 = 0$$

og for n jevn:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + \cdots + 1 \cdot 1 = 1$$

Det gir

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n\right) = 1 + x^2 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x^2}$$

Eksempel

Produktet

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^2 = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Vi har videre

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^3 + 4x^3 + \dots$$

og samtidig

$$\left(1 + x + x^2 + x^3 + \dots\right) \cdot \left(1 + x + x^2 + x^3 + \dots\right) = 1 + 2x + 3x^3 + 4x^3 + \dots$$