MAT 1110, 13. mai 2022

∗ Regning med potensrekker
∗ Taylor-rekker

Arne B. Sletsjøe
Universitetet i Oslo

Regning med potensrekker

Setning (Integrasjon av potensrekker)

Anta at potensrekken

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

har konvergensradius r*. Da er*

$$\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$$

for alle $a-r < x < a+r$*.*

Setning (Derivasjon av potensrekker)

Anta at potensrekken

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

har konvergensradius r. Da er f deriverbar for alle $a-r < x < a+r$ og

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$$

Produkt av rekker

Setning (Produkt av potensrekker)

La $= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *og* $= \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ *være to potensrekker hvor den minste konvergensradien er* r*. Da konvergerer* **Cauchy-produktet** *av de to rekkene*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

hvor

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

$$
\begin{aligned}
c_0 &= a_0 b_0 \\
c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 \\
c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Eksempel

Produktet

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n\right) = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-x^2}$$

Vi har for n odde:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 + \cdots + 1\cdot 1 = 0$$

og for n jevn:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + \cdots + 1\cdot 1 = 1$$

Det gir

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n\right) = 1 + x^2 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x^2}$$

Eksempel

Produktet

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^2 = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Vi har videre

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^3 + 4x^3 + \dots$$

og samtidig

$$\left(1 + x + x^2 + x^3 + \dots\right) \cdot \left(1 + x + x^2 + x^3 + \dots\right) = 1 + 2x + 3x^3 + 4x^3 + \dots$$

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ være to positive, konvergente potensrekker og la

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

Da har vi

$$\left(\sum_{n=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} b_n\right) \leq \sum_{n=0}^{N} c_n \leq \left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} b_n\right)$$

Lar vi $N \to \infty$ vil de to ytterkantene gå mot samme tall, og dermed også den i midten.

La $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ være to absolutt konvergente potensrekker og $\varepsilon > 0$. La videre $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ være Cauchy-produktet av de to positive, konvergente rekkene $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ og $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ Da har vi

$$\begin{aligned} \left| AB - \sum_{n=0}^{N} c_n \right| &\leq \left| AB - \left(\sum_{n=0}^{N} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{N} b_n \right) \right| + \left| \left(\sum_{n=0}^{N} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{N} b_n \right) - \sum_{n=0}^{N} c_n \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left(\left(\sum_{n=0}^{N} |a_n| \right) \left(\sum_{n=0}^{N} |b_n| \right) - \sum_{n=0}^{N} d_n \right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Vi har

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots$$

og derfor

$$\begin{aligned}
2\sin x \cos x &= 2\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots\right) \\
&= 2x - 2\left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!}\right)x^3 + 2\left(\frac{1}{5!} + \frac{1}{2!}\frac{1}{3!} + \frac{1}{1!4!}\right)x^5 - \dots \\
&\quad + (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2\left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-2)!}\frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{1!(n-1)!}\right)x^n \pm \dots
\end{aligned}$$

n oddetall.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-2)!}\frac{1}{2!} + \frac{1}{(n-4)!}\frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{3!}\frac{1}{(n-3)!} + \frac{1}{(n-1)!} \\
&\quad = \frac{1}{n!}\left(1 + \frac{n!}{(n-2)!2!} + \frac{n!}{(n-4)!4!} + \cdots + \frac{n!}{(n-1)!1!}\right) \\
&\quad = \frac{1}{n!}\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n-1}\right) \\
&\quad = \frac{1}{n!}\frac{1}{2}\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}\right) \\
&\quad = \frac{1}{n!}\frac{1}{2}(1+1)^n = \frac{1}{n!}2^{n-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\sin x\cos x &= 2\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\dots\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\dots\right)\\
&= 2x-2(\frac{2^2}{3!})x^3+2(\frac{2^4}{5!})x^5-\dots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}2\left(\frac{2^{n-1}}{n!}\right)x^n\pm\dots\\
&= 2x-\frac{8}{3!}x^3+\frac{32}{5!}x^5-\dots\\
&= 2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+\frac{1}{5!}(2x)^5-\dots=\sin(2x)
\end{aligned}
$$

Taylor-rekker

La $f(x)$ være en funksjon som er uendelig mange ganger deriverbar i punktet $x = a$. Da er **Taylor-polynomet** til f av grad n gitt ved

$$
\begin{aligned}
T_n(f) &= \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\
&= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k
\end{aligned}
$$

og **Taylor-rekka**

$$
Tf(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k
$$

Eksempel

Funksjonen $f(x) = e^x$ *oppfyller* $f^{(k)}(x) = e^x$ *for alle* k *og derfor* $f^{(k)}(0) = 1$. *Det gir*

$$Tf(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

Forholdstesten

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!} x^{n+1}}{\frac{1}{n!} x^n} \right| = \frac{1}{n+1} |x| \to 0$$

nå $n \to \infty$. *Det betyr at rekka konvergerer for alle* $x \in \mathbb{R}$.

Eksempel

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Alternerende rekke hvor $\{|a_n|\}$ *er en avtagende følge og*

$$|a_n| = \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \to 0$$

fnå $n \to \infty$, *for alle* $x \in \mathbb{R}$.

Setning

1. *Anta at* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *konvergerer i et intervall* $(a-r, a+r)$, $r > 0$.
2. *Kall grensefunksjonen*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

3. *Regn ut Taylor-rekka* $Tf(x)$ *til* $f(x)$. *Merk at*

$$f^{(k)}(x) = k!a_k + \frac{(k+1)!}{2!}a_{k+1}(x-a) + \frac{(k+2)!}{3!}a_{k+2}(x-a)^2 + \dots$$

   og derfor $f^{(k)}(a) = k!a_k$.

4. *Vi har*

$$Tf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

5. *Det betyr at innen konvergensområdet har vi* $Tf(x) = f(x)$.

Eksempel

Vi har

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Setter vi inn $x = -y^2$ *får vi*

$$e^{-y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-y^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{n!} = 1 - y^2 + \frac{y^4}{2!} - \frac{y^6}{3!} + \dots$$

Eksempel

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Det gir

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

Det betyr at

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\ln|1-x|$$

Men

$$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n} = 0$$

dvs.

$$f(x) = -\ln|1-x| \quad \mathit{for} \quad x \in (-1,1)$$

Eksempel

Vi skal finne et uttrykk for rekka

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n-1}$$

i konvergensområdet $-1 < x < 1$. *Vi har*

$$\frac{s(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

og derfor

$$\left(\frac{s(x)}{x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

Det gir

$$\frac{s(x)}{x} = \int_0^x \left(\frac{s(t)}{t}\right)' dt = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\, dt = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Det gir

$$s(x) = \frac{x}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Eksempel

Vi skal finne et uttrykk for rekka

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)2^n}$$

i konvergensområdet $-1 < x < 1$. *Vi ser i stedet på*

$$s(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$$

Deriverer 2 ganger:

$$s''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Eksempel

Det gir

$$s'(x) - s'(0) = \int_0^x s''(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\ln|1-x|$$

og vi regner ut at $s'(0) = 0$. *Videre har vi*

$$s(x) - s(0) = \int_0^x s'(t)\,dt = -\int_0^x \ln|1-t|\,dt = -(x-1)\ln|x-1| + x$$

Siden $s(0) = 0$ *får vi*

$$s(x) = \int_0^x s'(t)\,dt = -\int_0^x \ln|1-t|\,dt = -(x-1)\ln|x-1| + x$$

Vi er interessert i $s(\frac{1}{2}) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)2^n}$;

$$s(\frac{1}{2}) = -(\frac{1}{2} - 1)\ln|\frac{1}{2} - 1| + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$$