MAT 1110, 20. mai 2022

∗ Eksamensoppgaver

Arne B. Sletsjøe
Universitetet i Oslo

Eksamen, 4. juni 2021

Oppgave 1.

a) Forklar hva vi mener med at en rekke er betinget konvergent og gi et eksempel på en betinget konvergent rekke som ikke konvergerer absolutt.

b) Hva er konvergensradien til rekka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ der $a_1 = x$ og $a_{n+1} = -\frac{n+1}{n}\frac{x}{k}a_n$ for $n \geq 1$

c) Vis at

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{nx^n}{2^{n-1}} = -\frac{4x}{(2+x)^2}$$

i rekkas konvergensområde.

a)
Forklar hva vi mener med at en rekke er betinget konvergent og gi et eksempel på en betinget konvergent rekke som ikke konvergerer absolutt.

Løsning.
En rekke $\sum a_n$ er betinget konvergent dersom den konvergerer, men rekka $\sum |a_n|$ ikke konvergerer. Et eksempel er den alternerende harmoniske rekka $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$.

b)
Hva er konvergensradien til rekka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ der $a_1 = x$ og $a_{n+1} = -\frac{n+1}{n}\frac{x}{k}a_n$ for $n \geq 1$?

Løsning.
Vi bruker forholdstesten på rekka;

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{-\frac{n+1}{n}\frac{x}{k}a_n}{a_n}\right| = \left|\frac{n+1}{n}\frac{x}{k}\right| \to \left|\frac{x}{k}\right|$$

når $n \to \infty$. Forholdstesten sier at rekka konvergerer når denne grenseverdien er mindre enn 1, dvs. $|x| < |k|$, og divergerer når $|x| > |k|$. Konvergensradien er derfor $|k|$.

c)
Vis at

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{nx^n}{2^{n-1}} = -\frac{4x}{(2+x)^2}$$

i rekkas konvergensområde.

Løsning.
Vi tar utgangspunkt i

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x}{2})^n = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{2^{n-1}}$$

Derivasjon av venstresiden gir

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2+x}\right) = -\frac{1}{(2+x)^2}$$

På det indre av konvergensområdet kan vi derivere ledd for ledd, det gir for høyresiden;

$$\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{2^{n-1}}\right)=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{nx^{n-1}}{2^{n-1}}$$

Multipliserer vi begge uttrykkene med $4x$ får vi

$$-\frac{4x}{(2+x)^2}=4x\cdot\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{nx^{n-1}}{2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{nx^n}{2^{n-1}}$$

Oppgave 2.

a) La A være et lukket og begrenset område i $\mathbb{R}^2$, og la $f : A \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon på A, som er deriverbar på det indre av A. I følge ekstremalverdisetningen vil funksjonen ha et maksimumspunkt og et minimumspunkt i A. Forklar hvordan vi går fram for å finne disse ekstremalpunktene.

b) Vi har gitt en funksjon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ med at stasjonært punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$. For å avgjøre hva slags punkt det stasjonære punktet er, regner vi ut Hesse-matrisen $\mathrm{H}f(\mathbf{a})$ i det stasjonære punktet. Vi finner at det karakteristiske polynomet til Hesse-matrisen er gitt ved $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$. Hva slags stasjonært punkt er $\mathbf{a}$? Begrunn svaret.

c) Et plan P i $\mathbb{R}^3$ er gitt ved $ax + by + cz = d$ hvor $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Bruk Lagranges multiplikatormetode til å finne den minste avstanden fra origo til planet P ved å finne minimum for funksjonen $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ over P.

a)
La A være et lukket og begrenset område i $\mathbb{R}^2$, og la $f : A \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon på A, som er deriverbar på det indre av A. I følge ekstremalverdisetningen vil funksjonen ha et maksimumspunkt og et minimumspunkt i A. Forklar hvordan vi går fram for å finne disse ekstremalpunktene.

Løsning.
Først leter vi opp stasjonære punkter i det indre av A, ved å sette de partiellderiverte lik 0. Dernest sjekker vi typen av de stasjonære punktene er ved å regne Hesse-matrisen for punktene. Andrederivert-testen gir svar på om punktene er lokale maksimums-, minmums- eller sadelpunkter. Neste step er å sjekke for ekstremalpunkter på randa til A. Det gjør vi med Lagranges multiplikatormetode med likningen(e) til randa som bibetingelse(r). Til slutt sammenligner vi verdiene vi har funnet over og avgjør hvilke som er størst og minst.

b)
Vi har gitt en funksjon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ med at stasjonært punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$. For å avgjøre hva slags punkt det stasjonære punktet er, regner vi ut Hesse-matrisen $\mathrm{H}f(\mathbf{a})$ i det stasjonære punktet. Vi finner at det karakteristiske polynomet til Hesse-matrisen er gitt ved $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$. Hva slags stasjonært punkt er $\mathbf{a}$? Begrunn svaret.

Løsning.
Vi setter $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ og finner egenverdiene $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 2$. Andrederiverttesten sier at dersom begge egenverdiene til Hessematrisen er positive, så er det stasjonære punktet et minimumspunkt.

c)

Et plan P i $\mathbb{R}^3$ er gitt ved $ax + by + cz = d$ hvor $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Bruk Lagranges multiplikatormetode til å finne den minste avstanden fra origo til planet P ved å finne minimum for funksjonen $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ over P.

Løsning.

Funksjonen vi skal minimere er gitt ved $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ og bibetingelsen er gitt ved $g(x, y, z) = ax + by + cz - d$. Lagranges metode sier at vi skal sette

$$\nabla f = \lambda \cdot \nabla g$$

og $g(x, y, z) = 0$. Det gir

$$2x = \lambda a, \quad 2y = \lambda b, \quad 2z = \lambda c, \quad ax + by + cz = d$$

og ved å eliminere λ,

$$y = \frac{b}{a}x, \quad z = \frac{c}{a}, \quad ax + b\frac{b}{a}x + c\frac{c}{a}x = d$$

Her har vi antatt at $a \neq 0$. Vi kunne gjort tilsvarende regning ved å anta at $b \neq 0$ eller at $c \neq 0$. Dette går bra siden vi ikke kan ha $a = b = c = 0$.

Multipliserer vi den siste likningen med a får vi

$$a^2x + b^2x + c^2x = x = ad$$

Avstanden er gitt ved

$$\begin{aligned}\sqrt{f(ad, bd.cd)} &= \sqrt{(ad)^2 + (bd)^2 + (cd)^2} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)d^2} = |d|\end{aligned}$$

Oppgave 3.

La A være en 2×2-matrise gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

der a, b og d er reelle tall.

a) Finn egenverdiene til A uttrykt ved a, b og d, og forklar hvorfor egenverdiene må være relle.

b) La

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{15} \\ \frac{4}{15} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Regn ut egenverdiene til $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{15} \\ \frac{4}{15} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ og finn en basis av egenvektorer.

c) Forklar hva vi mener med at en funksjon er en kontraksjon og vis at funksjonen $\mathbf{F}$ i oppgave 3b) er en kontraksjon på $\mathbb{R}^2$.

d) Siden $\mathbf{F}$ er en kontraksjon på $\mathbb{R}^2$ vet vi at følgen

$$\mathbf{z}_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}) = \mathbf{F}(x_n, y_n) = \mathbf{F}(\mathbf{z}_n)$$

konvergerer uavhengig av startpunkt $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0)$. Finn grenseverdien

$$\mathbf{z} = \lim_{n \to \infty} \mathbf{z}_n$$

a)
Finn egenverdiene til A uttrykt ved a, b og d, og forklar hvorfor egenverdiene må være relle.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

Løsning.

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & d-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a-\lambda)(d-\lambda) - b^2 \\ &= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-b^2) = 0\end{aligned}$$

gir egenverdier

$$\lambda = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-b^2)}}{2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2}$$

Siden uttrykket under rottegnet er en sum av to kvadrater vil det være større enn eller lik 0, og egenverdiene er reelle. Alternativ kan vi basere oss på spektralteoremet for symmetriske matriser som sier at symmetriske matriser har reelle egenverdier.

b)
La
$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{15} \\ \frac{4}{15} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Regn ut egenverdiene til $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{15} \\ \frac{4}{15} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ og finn en basis av egenvektorer.

Løsning.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{5} - \lambda & \frac{4}{15} \\ \frac{4}{15} & -\frac{1}{5} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (-\frac{1}{25} - \frac{16}{225}) = \lambda^2 - \frac{25}{225} = \lambda^2 - \frac{1}{9}$$

som gir egenverdier $\lambda = \pm\frac{1}{3}$. Løsning av

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \pm \frac{1}{3} & \frac{4}{15} \\ \frac{4}{15} & -\frac{1}{5} \pm \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gir basisvektor $(1, -2)$ for egenrommet til $\lambda = \frac{1}{3}$ og $(2, 1)$ for egenrommet til $\lambda = -\frac{1}{3}$.

c)
Forklar hva vi mener med at en funksjon er en kontraksjon og vis at funksjonen $\mathbf{F}$ i oppgave 3b) er en kontraksjon på $\mathbb{R}^2$.

Løsning.
En funksjon $\mathbf{F}$ er en kontraksjon dersom for alle $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$, så er

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{y}) - \mathbf{F}(\mathbf{x})\| \leq C \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$$

hvor $C < 1$. Et kriterium for at $\mathbf{F} = (f_1, f_2)$ er en kontraksjon er at

$$\|\nabla f_1(\mathbf{c}_1)\|^2 + \|\nabla f_2(\mathbf{c}_2)\|^2 < 1$$

for alle $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in \mathbb{R}^2$. I vårt tilfelle har vi

$$\nabla f_1(\mathbf{c}_1) = (\frac{1}{5}, \frac{4}{15}), \quad \nabla f_2(\mathbf{c}_2) = (\frac{4}{15}, -\frac{1}{5})$$

som gir

$$\begin{aligned}\|\nabla f_1(\mathbf{c}_1)\|^2 + \|\nabla f_2(\mathbf{c}_2)\|^2 &= (\frac{1}{5})^2 + (\frac{4}{15})^2 + (\frac{4}{15})^2 + (-\frac{1}{5})^2 \\ &= \frac{3^2 + 4^2 + 4^2 + 3^2}{15^2} = \frac{50}{225} = \frac{2}{9} < 1\end{aligned}$$

d)
Siden $\mathbf{F}$ er en kontraksjon på $\mathbb{R}^2$ vet vi at følgen

$$\mathbf{z}_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}) = \mathbf{F}(x_n, y_n) = \mathbf{F}(\mathbf{z}_n)$$

konvergerer uavhengig av startpunkt $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0)$. Finn grenseverdien

$$\mathbf{z} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{z}_n$$

Løsning.
Siden følgen konvergerer mot (x_0, y_0) kan vi sette $\mathbf{F}(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$, dvs.

$$\mathbf{F}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{15} \\ \frac{4}{15} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Det gir oss likningssystemet

$$\frac{1}{5}x_0 + \frac{4}{15}y_0 + 1 = x_0$$
$$\frac{4}{15}x_0 - \frac{1}{5}y_0 + 1 = y_0$$

som har løsning

$$x_0 = \frac{33}{20}, \quad y_0 = \frac{6}{5}$$

Oppgave 4.

La

$$\mathbf{F}(x,y) = (2xy + y^3 + g(x), x + x^2 + 3xy^2 + h(y))$$

være et vektorfelt på $\mathbb{R}^2$, der $g(x)$ er en vilkårlig deriverbar funksjon i x og $h(y)$ en vilkårlig deriverbar funksjon i y. La $\mathscr{C}$ være den plane kurven gitt i polarkoordinater ved $r(\theta) = 2\pi\theta - \theta^2$ hvor $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Vi har $r(\theta) \geq 0$ for alle $\theta \in [0, 2\pi]$ og $r(0) = r(2\pi)$.

a) Vis at linjeintegralet av $\mathbf{F}$ langs med kurven $\mathscr{C}$ orientert mot venstre er

$$\oint_{\mathscr{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \tfrac{8}{15}\pi^5$$

b) Et vektorfelt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er gitt som gradienten til en funksjon f, dvs. $\mathbf{F} = \nabla f$. Forklar hvordan vi kan bruke Greens teorem til å vise at integralet av $\mathbf{F}$ langs en lukket kurve som ikke skjærer seg selv er 0.

a)
Vis at linjeintegralet av $\mathbf{F}(2xy + y^3 + g(x), x + x^2 + 3xy^2 + h(y))$ langs med kurven $\mathscr{C}$ orientert mot venstre er

$$\oint_{\mathscr{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \tfrac{8}{15}\pi^5$$

Løsning.
Vi lar $\mathbf{F} = (P, Q)$, og får da

$$\oint_{\mathscr{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \, dx \, dy$$

hvor S er området som $\mathscr{C}$ omslutter. Dette gir

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(x + x^2 + 3xy^2 + h(y) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy + y^3 + g(x)) \\ &= (1 + 2x + 3y^2) - (2x + 3y^2) = 1 \end{aligned}$$

mao, $\oint_{\mathscr{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ svarer til arealet av S.

Dette arealet kan vi finne ved integralet

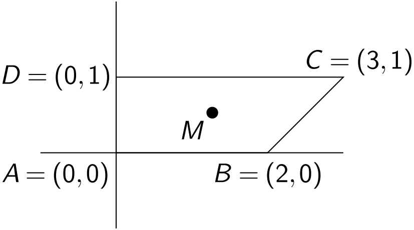
$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi\theta-\theta^2} r\,dr\,d\theta &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(2\pi\theta-\theta^2)^2\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 4\pi^2\theta^2 - 4\pi\theta^3 + \theta^4\,d\theta \\
&= [\frac{2}{3}\pi^2\theta^3 - \frac{1}{2}\pi\theta^4 + \frac{1}{10}\theta^5]_0^{2\pi} \\
&= (\frac{16}{3} - 8 + \frac{32}{10})\pi^5 = \frac{8}{15}\pi^5
\end{aligned}$$

b)
Et vektorfelt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er gitt som gradienten til en funksjon f, dvs. $\mathbf{F} = \nabla f$. Forklar hvordan vi kan bruke Greens teorem til å vise at integralet av $\mathbf{F}$ langs en lukket kurve som ikke skjærer seg selv er 0.

Løsning.
Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved $\mathbf{F} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ og Greens teorem gir da at

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy = 0$$

Oppgave 5.



a) Et trapes $ABCD$ med hjørner $A = (0,0)$, $B = (2,0)$, $C = (3,1)$ og $D = (0,1)$ er gitt (se figur). Vis at massemiddelpunktet M til trapeset har koordinater $(\frac{19}{15}, \frac{8}{15})$.

b) Over trapeset i oppgave a) setter vi opp et tak, dvs. en flate gitt ved funksjonen $f(x,y) = 1 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y$. Finn arealet av denne flaten over trapeset.

a)

Et trapes $ABCD$ med hjørner $A = (0,0)$, $B = (2,0)$, $C = (3,1)$ og $D = (0,1)$ er gitt (se figur). Vis at massemiddelpunktet M til trapeset har koordinater $(\frac{19}{15}, \frac{8}{15})$.

Løsning.

Arealet av trapeset er $\frac{(2+3)\cdot 1}{2} = \frac{5}{2}$. En naturlig parametrisering av trapeset er $0 \leq x \leq y+2$, $0 \leq y \leq 1$. Det gir

$$\overline{x} = \frac{2}{5}\int_0^1 \int_0^{y+2} x\,dx\,dy = \frac{2}{5}\int_0^1 \frac{1}{2}(y+2)^2\,dy = \frac{2}{5}(\frac{1}{6}+1+2) = \frac{19}{15}$$

og

$$\overline{y} = \frac{2}{5}\int_0^1 \int_0^{y+2} y\,dx\,dy = \frac{2}{5}\int_0^1 y(y+2)\,dy = \frac{2}{15}+\frac{2}{5} = \frac{8}{15}$$

En alternativ løsning er å dele trapeset opp i to deler, rektangelet $ABED$ hvor $E = (2,1)$. Symmetri gir at massemiddelpunktet for rektangelet er $M_1 = (1, \frac{1}{2})$ og arealet er 2. Trekanten BCE har massemiddelpunkt $M_2 = (\frac{7}{3}, \frac{2}{3})$ og areal $\frac{1}{2}$. Det gir

$$M = \frac{2}{5}\left(2 \cdot (1, \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \cdot (\frac{7}{3}, \frac{2}{3})\right) = (\frac{19}{15}, \frac{8}{15})$$

b)
Over trapeset i oppgave a) setter vi opp et tak, dvs. en flate gitt ved funksjonen $f(x,y) = 1 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y$. Finn arealet av denne flaten over trapeset.

Løsning.
Vi parametriserer flaten ved

$$\mathbf{r}(x,y) = (x,y,f(x,y)) = (x,y,1+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})$$

Jacobi-matrisen til avbildningen er

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

med absoluttverdi

$$\sqrt{(-\frac{1}{4})^2 + (-\frac{1}{2})^2 + 1} = \sqrt{\frac{21}{16}} = \frac{\sqrt{21}}{4}$$

Det gir areal

$$areal = \int_0^1 \int_0^{y+2} \frac{\sqrt{21}}{4}\, dx\, dy = \frac{\sqrt{21}}{4} \int_0^1 y + 2\, dy = \frac{\sqrt{21}}{4}\frac{5}{2} = \frac{5\sqrt{21}}{8}$$

Eksamen, 29. mai 2019

Oppgave 1. La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 4/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til A.
Svar:
Den karakteristiske likningen blir

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= (\lambda - 2/5)(\lambda - 1/5) - 12/25 \\ &= \lambda^2 - \frac{3}{5}\lambda + \frac{2}{25} - \frac{12}{25} = \lambda^2 - \frac{3}{5}\lambda - \frac{2}{5} = 0 \end{aligned}$$

slik at egenverdiene blir

$$\lambda = \frac{\frac{3}{5} \pm \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{8}{5}}}{2} = \frac{\frac{3}{5} \pm \frac{7}{5}}{2} = \frac{3}{10} \pm \frac{7}{10},$$

det vil si $\lambda_1 = -2/5$, $\lambda_2 = 1$.
Vi har at

$$-\frac{2}{5}I - A = \begin{pmatrix} -4/5 & -3/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3/4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Komponentene i en egenvektor for $\lambda_1 = -2/5$ må dermed oppfylle $x = -3y/4$. En generell slik må derfor være på formen $\begin{pmatrix} -3y/4 \\ y \end{pmatrix}$. Setter vi $y = 4$ få vi spesielt egenvektoren $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Vi har at

$$I - A = \begin{pmatrix} 3/5 & -3/5 \\ -4/5 & 4/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Komponentene i en egenvektor for $\lambda_2 = 1$ må dermed oppfylle $x = y$. En generell slik må derfor være på formen $\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$. Setter vi $y = 1$ får vi spesielt egenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Skriv vektoren $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 24 \end{pmatrix}$ som en sum av egenvektorer, og regn ut grenseverdien $\lim_{n\to\infty} A^n \boldsymbol{x}_0$.

Svar: Sett $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Disse danner en basis av egenvektorer for $\mathbb{R}^2$. For å skrive $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 24 \end{pmatrix}$ som en lineær kombinasjon av disse radreduserer vi

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -1 \\ 4 & 1 & 24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -1 \\ 0 & 7/3 & 28 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -1 \\ 0 & 1 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 12 \end{pmatrix},$$

slik at $\boldsymbol{x}_0 = 3\boldsymbol{v}_1 + 12\boldsymbol{v}_2$. Vi får dermed

$$\lim_{n\to\infty} A^n \boldsymbol{x}_0 = \lim_{n\to\infty} A^n(3\boldsymbol{v}_1 + 12\boldsymbol{v}_2) = \lim_{n\to\infty} (3(-2/5)^n \boldsymbol{v}_1 + 12\boldsymbol{v}_2)$$
$$= 12\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 2.

a) Finn volumet avgrenset av paraboloidene $z = 4 - x^2 - y^2$ og $z = 2 + x^2 + y^2$.
Svar: Skjæringen mellom de to paraboloidene finner vi ved å løse

$$4 - x^2 - y^2 = 2 + x^2 + y^2.$$

Dette gir $x^2 + y^2 = 1$, slik at sirkelen om origo med radius 1 er skjæringen mellom dem. Det er videre klart at paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ ligger øverst innenfor det avgrensede området (dette kan verifiseres ved å sette inn $x = y = 0$), slik at høyden på det avgrensede området er $4 - x^2 - y^2 - (2 + x^2 + y^2) = 2 - 2x^2 - 2y^2$. Volumet blir derfor $V = \int\int_D (2 - 2x^2 - 2y^2)\, dx\, dy$, der $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. I polarkoordinater blir integralet

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (2 - 2r^2) r\, dr\right] d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[r^2 - \frac{1}{2}r^4\right]_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \pi.\end{aligned}$$

b) Regn ut linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} \left(x - \frac{1}{3}x^3 - xy^2\right) dy$ der $\mathcal{C}$ er enhetssirkelen $x^2 + y^2 = 1$ orientert mot klokka.
Svar: Med $P(x, y) = 0$ og $Q(x, y) = x - \frac{1}{3}x^3 - xy^2$ får vi først at $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ og $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 - x^2 - y^2$. Bruker vi Greens teorem får vi at

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \left(x - \frac{1}{3}x^3 - xy^2\right) dy &= \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy \\
&= \int\int_D (1 - x^2 - y^2)\, dx\, dy \\
&= \frac{1}{2}\int\int_D (2 - 2x^2 - 2y^2)\, dx\, dy \\
&= \frac{1}{2}\pi = \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

det vi brukte svaret fra a). Dette kan også vises direkte ved regning: Med parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ får vi

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \left(x - \frac{1}{3}x^3 - xy^2\right) dy &= \int_0^{2\pi} \left(\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t - \cos t \sin^2 t\right) \cos t dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{3}\cos^2 t - \sin^2 t\right) \cos^2 t dt \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} \cos^4 t dt \\
&= \frac{1}{6}\int_0^{2\pi} (1 + \cos(2t))^2 dt \\
&= \frac{1}{6}\int_0^{2\pi} (1 + 2\cos 2t + \cos^2(2t)) dt \\
&= \frac{1}{6}\int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos 2t + \frac{1}{2}(1 + \cos(4t))\right) dt \\
&= \frac{1}{6}\int_0^{2\pi} (1 + 1/2) dt = \pi/2.
\end{aligned}$$

Oppgave 3. La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 20 & 1 \\ 4 & 3 & 18 & 1 \\ 2 & 3 & 12 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Regn ut den reduserte trappeformen til A, og skriv ned tre søyler fra A som er lineært uavhengige.

Svar: Radreduksjon gir

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 5 & 0\\ 4 & 4 & 20 & 1\\ 4 & 3 & 18 & 1\\ 2 & 3 & 12 & 0\end{pmatrix} \sim_{II-4I, III-4I, IV-2I} \begin{pmatrix}1 & 1 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\sim_{II\leftrightarrow IV} \begin{pmatrix}1 & 1 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\sim_{III+II} \begin{pmatrix}1 & 1 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\sim_{IV-III} \begin{pmatrix}1 & 1 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\sim_{I-II} \begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

slik at søyle 1,2, og 4 er pivotsøyler. Søyle 1,2, og 4 i A er derfor lineært uavhengige.

b) Finn en basis for $\mathbb{R}^4$, der de tre lineært uavhengige søylene du kom fram til i a) inngår.
Svar: Vi erstatter den tredje søylen i den reduserte trappeformen til A med en vektor som er lineært uavhengig fra de andre, og gjør de inverse

radoperasjonene over i motsatt rekkefølge:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\sim^{I+II}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\sim^{IV+III}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\sim^{III-II}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\sim^{II\leftrightarrow IV}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\sim^{II+4I,III+4I,IV+2I}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 4 & 1 & 1\\ 4 & 3 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Vi kan derfor utvide de tre søylene fra A som vi fant i a) med $(0, 1, 0, 0)$ for å få en basis for $\mathbb{R}^4$.

Oppgave 4.

Hva blir konvergensområdet for rekken $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n+1}}{n}$? Finn også et uttrykk for $S(x)$ der rekken konvergerer.

Svar: Forholdstesten gir at $|a_{n+1}/a_n| = |(x-1)^2 n/(n+1)| \to |x-1|^2$, slik at rekken konvergerer absolutt i $(0,2)$. For $x=0$ får vi rekka $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, og for $x=2$ får vi rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Begge disse divergerer, slik at konvergensområdet blir $(0,2)$.

For å regne ut summen av rekka kan vi først dele med $x-1$ på begge sider:

$$\frac{S(x)}{x-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n}.$$

Deriverer vi begge sider får vi at

$$\left(\frac{S(x)}{x-1}\right)' = 2\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^{2n-1} = \frac{2(x-1)}{1-(x-1)^2}.$$

Integrasjon gir så at $\frac{S(x)}{x-1} = -\ln\left|1-(x-1)^2\right| + C$. Setter vi inn $x=1$ ser vi at $C=0$. Vi får dermed at

$$S(x) = -(x-1)\ln\left|1-(x-1)^2\right| = -(x-1)\ln\left(1-(x-1)^2\right).$$

Oppgave 5. I denne oppgaven skal vi se på funksjonen

$$f(x,y) = x^2e^x + (3y^2 - 6y)e^x + 1.$$

a) Finn de stasjonære punktene til f.
Svar: Vi har at

$$\nabla f = \begin{pmatrix} (x^2 + 2x + 3y^2 - 6y)e^x \\ (6y - 6)e^x \end{pmatrix}.$$

Setter vi dette lik 0 følger det fra den andre likningen at $y = 1$. Setter vi dette inn i den første likningen får vi at $x^2 + 2x - 3 = 0$, som gir at $x = 1$ eller $x = -3$. Dermed blir de stasjonære punktene $(1, 1)$ og $(-3, 1)$.

b) Avgjør om de stasjonære punktene er sadelpunkter, lokale minimumspunkter, eller lokale maksimumspunkter.
Svar: Hessematrisen til f er

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} (x^2+2x+3y^2-6y+2x+2)e^x & (6y-6)e^x \\ (6y-6)e^x & 6e^x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x^2+4x+3y^2-6y+2)e^x & (6y-6)e^x \\ (6y-6)e^x & 6e^x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

For punktet $(1,1)$ blir Hessematrisen $e\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, som har egenverdiene $4e$ og $6e$. Derfor er $(1,1)$ et lokalt minimumspunkt.
For punktet $(-3,1)$ blir Hessematrisen $e^{-3}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, som har egenverdiene $-4e^{-3}$ og $6e^{-3}$. Siden disse har motsatt fortegn er $(-3,1)$ et sadelpunkt.

c) Bruk Lagrange's multiplikatormetode til å vise at lokale ekstremalpunkter for f under betingelsen $y = 3 - 2x$ må være skjæringspunkter mellom linjen $y = 3 - 2x$ og ellipsen $\frac{(x+1)^2}{4^2} + \frac{(y-3)^2}{(4/\sqrt{3})^2} = 1$. Forklar videre hvorfor f må ha et globalt minimum under denne betingelsen (du trenger ikke skrive opp selve minimumspunktet). Har f et globalt maksimum under den samme betingelsen?

Hint: Verifiser at $f(1,1) < 1$, og at $\lim_{x\to\infty} f(x, 3-2x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x, 3-2x) = 1$. Dette kan brukes til å vise at f må ha et globalt minimum under den gitte betingelsen.

Svar: Vi setter $g(x,y) = 2x + y - 3$. Fra læreboka følger det at, i et lokalt ekstremalpunkt for f under betingelsen $g(x,y) = 0$, så er enten $\nabla g = 0$, eller $\nabla f = \lambda \nabla g$.

Siden $\nabla g = (2,1) \neq \mathbf{0}$ får vi ingen kandidater fra førstnevnte. Lokale ekstremalpunkter må derfor tilfredsstille $\nabla f = \lambda \nabla g$, som kan skrives

$$
\begin{aligned}
(x^2 + 2x + 3y^2 - 6y)e^x &= 2\lambda \\
(6y - 6)e^x &= \lambda.
\end{aligned}
$$

Eliminerer vi λ får vi at $x^2 + 2x + 3y^2 - 6y = 2(6y - 6)$, som kan skrives som $x^2 + 2x + 3y^2 - 18y = -12$. Fullfører vi kvadratene får vi at $(x+1)^2 + 3(y-3)^2 = 16$, som er ellipsen gitt i oppgaven. Dette beviser at lokale ekstrmalpunkter under den gitte betingelsen er skjæringspunkter mellom linjen og ellipsen.

Vi har at $g(1,1) = 0$, og $f(1,1) = e^1 - 3e^1 + 1 = 1 - 2e < 1$, slik at f antar verdier mindre enn 1 under den gitte betingelsen. Når $x \to \infty$ vil $x^2 e^x \to \infty$. Videre vil da også $y = 3 - 2x \to -\infty$, og da vil $(3y^2 - 6y)e^x \to \infty$ også. Det følger at $\lim_{x\to\infty} f(x, 3-2x) = \infty$. Det følger at f ikke ha noe globalt maksimum under den gitte betingelsen.

Når $x \to -\infty$ så vil e^x gå raskere mot 0 enn potenser av x, slik at $\lim_{x\to-\infty} f(x, 3-2x) = 1$.

Det følger at det finnes et intervall $[-K, K]$ slik at $f(x, 3-2x) > 1 - \epsilon > f(1,1)$ utenfor dette intervallet. Siden $f(x, 3-2x)$ har et globalt minimum på intervallet $[-K, K]$, så følger at dette også er et globalt minimum for f under den gitte betingelsen.

Man kan bruke samme argument som over til å vise at $(1,1)$ også er et globalt minimum for f, uten noen betingelse. Siden $(1,1)$ ligger på linjen, så må det også være globalt minimum for f, med den gitte betingelsen.

Eksamen, 8. juni 2018

Oppgave 1. La $R > 0$ være et reelt tall.

a) Beregn dobbeltintegralet

$$\int\int_D x^2 e^{-x^3} \sin y \, dxdy$$

der D er området i $\mathbf{R}^2$ bestående av alle punkter (x, y) slik at $0 \leq x \leq R$ og $0 \leq y \leq \pi$.

b) La K_R være området i $\mathbf{R}^3$ bestående av alle punkter (x, y, z) slik at

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq R.$$

Beregn trippelintegralet

$$I_{K_R} = \int\int\int_{K_R} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dxdydz,$$

og finn

$$\lim_{R \to \infty} I_{K_R}.$$

Oppgave 1

a) $$\iint_D x^2 e^{-x^3} \sin y \, dx\,dy = \int_0^R \left[\int_0^\pi x^2 e^{-x^3} \sin y \, dy \right] dx$$

$$= \int_0^R \left[x^2 e^{-x^3} (-\cos y) \right]_{y=0}^{y=\pi} dx$$

$$= \int_0^R \left[x^2 e^{-x^3} (-(-1)-(-1)) \right] dx = 2 \int_0^R x^2 e^{-x^3} dx$$

$u = -x^3$

$\frac{du}{dx} = -3x^2$

$dx = \frac{-1}{3x^2} du$

$x=0$ gir $u=0$

$x=R$ gir $u=-R^3$

$$= 2 \int_0^{-R^3} x^2 e^u \left(\frac{-1}{3x^2} \right) du = -\frac{2}{3} \int_0^{-R^3} e^u \, du$$

$$= -\frac{2}{3} \left[e^{-R^3} - e^0 \right] = \underline{\underline{\frac{2}{3}\left(1 - e^{-R^3}\right)}}$$

b) Beskrivelse av K_R i kulekoordinater:

$$\begin{cases} \rho \in [0, R] \\ \phi \in [0, \pi] \\ \theta \in [0, 2\pi) \end{cases} \qquad J = \rho^2 \sin\phi$$

Så vi får

$$I_{K_R} = \int_0^R \left[\int_0^\pi \left[\int_0^{2\pi} e^{-\rho^3} \cdot \rho^2 \sin\phi \, d\theta \right] d\phi \right] d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^R \left[\int_0^\pi \rho^2 e^{-\rho^3} \sin\phi \, d\phi \right] d\rho$$

a)

$$= 2\pi \cdot \frac{2}{3} \left(1 - e^{-R^3}\right) = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3}\left(1 - e^{-R^3}\right)}}$$

Dette gir

$$\lim_{R\to\infty} I_{K_R} = \lim_{R\to\infty} \frac{4\pi}{3}\left(1 - \underbrace{e^{-R^3}}_{\to 0}\right) = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3}}}$$

Oppgave 2. La $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ være skalarfunksjonen definert ved

$$f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 24x - 10y + 61$$

a) Finn eventuelle stasjonære punkter til f, og avgjør om de er lokale minimumspunkter, lokale maksimumspunkter eller sadelpunkter.

b) Skisser kurven

$$4x^2 - 24x + 9y^2 - 90y + 225 = 0,$$

og la D være det lukkede området i $\mathbf{R}^2$ begrenset av denne kurven. Begrunn at f har et globalt maksimumspunkt og et globalt minimumspunkt på området D.

Oppgave 2

a) $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 8x - 24 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - 10 \end{cases}$

Så $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ gir $\begin{cases} 8x - 24 = 0 \\ 2y - 10 = 0 \end{cases}$ dvs. $x = 3$, $y = 5$

Stasjonært punkt for f: $(3, 5)$

Hesse-matrisen til f:

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

H har egenverdiene 8 og 2, som begge er strengt positive.
Altså er $(3, 5)$ et lokalt minimumspunkt for f.

b) $4x^2 - 24x + 9y^2 - 90y + 225 = 0$

kan skrives

$$4(x^2-6x) + 9(y^2-10y) = -225$$

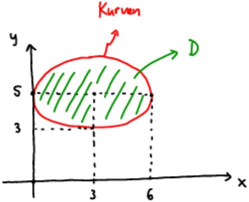
$$4(x^2-6x+9) + 9(y^2-10y+25) = -225 + 4\cdot 9 + 9\cdot 25$$

$$4(x-3)^2 + 9(y-5)^2 = 36$$

$$\frac{(x-3)^2}{3^2} + \frac{(y-5)^2}{2^2} = 1$$

Dette viser at kurven er en ellipse med sentrum $(3,5)$ og halvakser 3 og 2.

Skisse:



Siden D er avgrenset av en ellipse, er D lukket og begrenset. Det følger da fra ekstremalverdisetningen at f har et globalt maksimumspunkt og et globalt minimumspunkt på området D.

c) Fra det indre av D har vi kun en kandidat til global maks/min-verdi, nemlig $f(3,5) = 0$. For å se etter kandidater fra randen til D, bruker vi Lagrange:

$$\nabla f = \lambda \cdot \nabla g$$

med $g(x,y) = 4x^2 - 24x + 9y^2 - 90y + 225$ gir

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad \text{dvs.} \quad \left\{\begin{aligned} 8x - 24 &= \lambda\,(8x - 24) \qquad \mathrm{I} \\ 2y - 10 &= \lambda\,(18y - 90) \qquad \mathrm{II} \end{aligned}\right.$$

I gir $\lambda = 1$ eller $x = 3$

II gir $\lambda = \frac{1}{9}$ eller $y = 5$

Dette gir tre muligheter:

1. $\lambda = 1, \; y = 5$
2. $x = 3, \; \lambda = 1/9$
3. $x = 3, \; y = 5$ (ikke på randen)

① innsatt i kurven gir

$$\frac{(x-3)^2}{3^2} = 1\ , \quad \text{dvs.} \quad x-3 = \pm 3\ , \quad \text{altså} \quad x = \begin{cases} 6 \\ 0 \end{cases}$$

Kandidater:

$f(6,5) = 36 \qquad f(0,5) = 36$

② innsatt i kurven gir

$$\frac{(y-5)^2}{2^2} = 1\ , \quad \text{dvs.} \quad y-5 = \pm 2\ , \quad \text{altså} \quad y = \begin{cases} 7 \\ 3 \end{cases}$$

Kandidater:

$f(3,7) = 4 \qquad f(3,3) = 4$

Vi ser at $\nabla g(x,y) = (0,0)$ kun for $(x,y) = (3,5)$, som ikke er på randen til D.
Våre 5 kandidater til maks/min er dermed alle. Konklusjon:

Global maksimumsverdi for f på D : $\underline{\underline{36}}$

— " — minimumsverdi — " — : $\underline{\underline{0}}$

(Kommentar: Oppgaven kan løses enklere ved å observere at $f(x,y) = 4(x-3)^2 + (y-5)^2$)

Oppgave 3.

a) Avgjør for hvilke reelle tall x rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n (n+5)!}{n!} (x-2)^n$$

konvergerer.

b) Bevis at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+3}}{4^{2n+3}(2n+1)!} = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{32}.$$

Oppgave 3

a) Forholdstesten:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{n+1}(n+6)!\,(x-2)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{e^n(n+5)!\,(x-2)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{e(n+6)}{n+1}\cdot|x-2| = e\cdot|x-2|$$

Altså konvergens hvis

$$e\cdot|x-2|<1, \quad \text{dvs.} \quad |x-2|<\frac{1}{e}$$

og divergens hvis $|x-2|>\frac{1}{e}$. Altså $R=\frac{1}{e}$. Endepunkter:

$\underline{x = 2 + \frac{1}{e}}$ gir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n (n+5)!}{n!} \left(2 + \frac{1}{e} - 2\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)!}{n!}$$

(Divergerer ved divergenstesten)

$\underline{x = 2 - \frac{1}{e}}$ gir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n (n+5)!}{n!} \left(2 - \frac{1}{e} - 2\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+5)!}{n!}$$

(Divergerer ved divergenstesten)

Så: Rekken konvergerer for $\underline{\underline{x \in \left(2 - \frac{1}{e}, \ 2 + \frac{1}{e}\right)}}$

b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \pi^{2n+3}}{4^{2n+3}(2n+1)!}$$ kan oppfattes som

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+3} = x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$ med $x = \frac{\pi}{4}$ innsatt.

Rekken her konvergerer mot $\sin x$ for alle $x \in \mathbb{R}$, så med $x = \frac{\pi}{4}$ blir uttrykket til høyre

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{\pi^2 \cdot \sqrt{2}}{32}}}$$

Oppgave 4. La A være matrisen gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 3/10 & 1/10 \\ 6/10 & 2/10 \end{pmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til A.

b) La $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix}$, og

$$\mathbf{x}_n = A^n \mathbf{x}_0 \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \dots$$

Finn $\mathbf{x}_n$ for $n \geq 0$, og vis at

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

c) Bevis at avbildningen $\mathbf{F} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definert ved $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ er en kontraksjon.

Oppgave 4

a) Egenverdier:

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{10}-\lambda & \frac{1}{10} \\ \frac{6}{10} & \frac{2}{10}-\lambda \end{vmatrix} = \left(\lambda - \frac{3}{10}\right)\left(\lambda - \frac{2}{10}\right) - \frac{6}{100}$$

$$= \lambda^2 - \frac{5}{10}\lambda + \frac{6}{100} - \frac{6}{100} = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda$$

$$= \lambda\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{gir} \quad \lambda = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{(egenverdier)}$$

Egenvektorer til $\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{6}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{gir}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{10}x + \frac{1}{10}y = 0 \\ \frac{6}{10}x + \frac{2}{10}y = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{c} \text{Begge sier} \\ y = -3x \end{array} \right) \quad \text{Løsning: } \begin{pmatrix} A_1 \\ -3A_1 \end{pmatrix} \quad (A_1 \in \mathbb{R})$$

Egenvektorer til $\lambda_2 = \frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{6}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{gir}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{10}x + \frac{1}{10}y = \frac{1}{2}x \\ \frac{6}{10}x + \frac{2}{10}y = \frac{1}{2}y \end{cases} \quad \left(\begin{array}{c} \text{Begge sier} \\ y = 2x \end{array} \right) \quad \text{Løsning: } \begin{pmatrix} A_2 \\ 2A_2 \end{pmatrix} \quad (A_2 \in \mathbb{R})$$

b) Skriver $\begin{pmatrix}13\\1\end{pmatrix}$ som en lineærkombinasjon av egenvektorer for A:

$$\begin{pmatrix}13\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_1\\-3A_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}A_2\\2A_2\end{pmatrix} \quad \text{gir} \quad \begin{cases} A_1 + A_2 = 13 & \mathrm{I} \\ -3A_1 + 2A_2 = 1 & \mathrm{II} \end{cases}$$

I sier $A_1 = 13 - A_2$

II sier da $-3(13 - A_2) + 2A_2 = 1$, som gir $5A_2 = 40$, $A_2 = 8$

Så $A_1 = 13 - 8 = 5$. Konklusjon:

$$\begin{pmatrix}13\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-15\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\16\end{pmatrix} \qquad \text{(stemmer!)}$$

Dermed:

$$\vec{x}_n = A^n \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix} = A^n \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} \right] = A^n \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \end{pmatrix} + A^n \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$= 0^n \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \end{pmatrix} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}}} \quad \text{for } n > 0$$

Dette gir

$$\lim_{n \to \infty} \vec{x}_n = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}} \quad \text{fordi} \quad \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \to 0. \quad \text{Vi har } \vec{x}_0 = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix}}}.$$

c) Vi har $F_1(x,y) = \frac{3}{10}x + \frac{1}{10}y$

$F_2(x,y) = \frac{6}{10}x + \frac{2}{10}y$

Så
$$\nabla F_1 = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = \left(\frac{3}{10}, \frac{1}{10}\right)$$
$$\nabla F_2 = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) = \left(\frac{6}{10}, \frac{2}{10}\right)$$

For alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ har vi dermed
$$|\nabla F_1|^2 = \frac{9}{100} + \frac{1}{100} = \frac{1}{10}$$
$$|\nabla F_2|^2 = \frac{36}{100} + \frac{4}{100} = \frac{4}{10}$$

Altså
$$\sqrt{|\nabla F_1|^2 + |\nabla F_2|^2} = \sqrt{\frac{5}{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

Det følger fra setning 5.5.8 at $\vec{F}$ er en kontraksjon.