MAT 1110, 23. mai 2022

∗ Eksamensoppgaver

Arne B. Sletsjøe
Universitetet i Oslo

Eksamen, 14. juni 2017

Oppgave 1

La C være kurven

$$\mathbf{r}(t) = t\cos(t)\,\mathbf{i} + t\sin(t)\,\mathbf{j}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

og la $\mathbf{F}$ være vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}.$$

1a (10 poeng)

Regn ut

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

1b (10 poeng)

Regn ut arealet av området avgrenset av C og den rette linja fra $(2\pi, 0)$ til $(0, 0)$.

Forslag til svar: Vi har at

$$\mathbf{r}'(t) = (\cos(t), \sin(t)) + t(-\sin(t), \cos(t)) \text{ og } \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = t(-\sin(t), \cos(t)),$$

som gir at $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = t^2$. Da blir integralet

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} t^2 \, dt = \frac{8}{3}\pi^3.$$

Forslag til svar: Vi har at

$$\text{areal} = \iint_A dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{|\mathbf{r}(t)|} \rho \, d\rho dt = \int_0^{2\pi} \int_0^{t} \rho \, d\rho dt = \frac{4}{3}\pi^3.$$

Oppgave 2

La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2a (10 poeng)

For hvilke $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ har ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ entydig løsning $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$?

2b (10 poeng)

Sett

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ingen løsning, men vi ønsker vi å finne $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ slik at vi er "nærmest mulig en løsning". Sett

$$f(\mathbf{x}) = |A\mathbf{x} - \mathbf{b}|^2.$$

Forklar hvorfor f har ett entydig globalt minimum, og finn (x, y) slik at $f(x, y)$ er minimal.

Forslag til svar: Vi får den reduserte trappeformen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ 2 & 1 & b_2 \\ 1 & 0 & b_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 3 & 2b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & b_1 - 2b_2 + 3b_3 \end{pmatrix}$$

Dersom $b_1 - 2b_2 + 3b_3 = 0$ har vi entydig løsning.

Forslag til svar: Vi har at

$$f(x, y) = (2x + y)^2 + (x + 2y)^2 + (x - 1)^2 = 5x^2 + 4y^2 + 8xy - 2x + 1.$$

Ligningen $\nabla f = 0$ blir

$$12x + 8y = 2, \text{ og } 8x + 10y = 0,$$

som har entydig løsning $x = 5/14$, $y = -4/14$. Hessematrisen til f blir

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}, \quad \det(Hf) = 120 - 64 = 56 > 0,$$

og $Hf_{1,1} = 12 > 0$ så blir dette et minimum.

Oppgave 3

3a (10 poeng)

Avgjør om denne rekka konvergerer eller divergerer:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln(n)}{n}.$$

3b (10 poeng)

Finn summen av rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{(n+1)4^{n+1}}.$$

Forslag til svar: Dette er en alternerende rekke, som konvergerer hvis det $n$te leddet går mot null. Vi sjekker

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

så rekka konvergerer.

Forslag til svar: Vi har at

$$\frac{\pi^n}{(n+1)4^{n+1}} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/4} x^n\,dx.$$

Derfor har vi at

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{(n+1)4^{n+1}} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/4} \sum_{n=0}^{\infty} x^n\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/4} \frac{1}{1-x}\,dx \\
&= \frac{-1}{\pi}\ln(1-\frac{\pi}{4}) \\
&= \frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{\pi}{4-\pi}\right) \approx 0.49
\end{aligned}$$

Oppgave 4 (10 poeng)

Finn det største volumet til kassen med hjørner $(0,0,0)$, $(x,0,0)$, $(0,y,0)$, $(0,0,z)$, $(x,y,0)$, $(x,0,z)$, $(0,y,z)$ og (x,y,z), der $x > 0$, $y > 0$ og $z > 0$, og (x,y,z) ligger på ellipsoiden

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1.$$

Forslag til svar: Vi bruker Lagranges metode med $f(x, y, z) = xyz$ og $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4}$. Ligningene blir

$$\begin{aligned} yz &= 2\lambda x \\ xz &= 2\lambda y \qquad x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1. \\ xy &= 2\lambda \frac{z}{4} \end{aligned}$$

Vi ser at x, y eller z lik null ikke er noe maksimum, da må $\lambda > 0$. Vi deler ligning 2 på ligning 3, og ligning 1 på ligning 2 og får at

$$x^2 = y^2 = \frac{z^2}{4},$$

som innsatt i den fjerde ligningen gir

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad z = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Dette er det eneste kritiske punktet til f på ellipsoiden, og det må være et maksimum. Volumet blir

$$\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Oppgave 5

5a (10 poeng)

Vis at dersom D er en $n \times n$ diagonalmatrise med ikke-negative tall på diagonalen, så fins det en matrise S slik at $S^2 = D$.

5b (10 poeng)

Anta at A er en $n \times n$ matrise med n lineært uavhengige egenvektorer og at alle egenverdiene til A er ikke-negative. Vis at det fins en matrise B slik at $B^2 = A$.

5c (10 poeng)

Sett

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Finn en matrise B slik at $B^2 = A$.

Forslag til svar: Hvis det $i$te diagonalelementet i D er a_i^2, sett S lik diagonalmatrisen med a_i på $i$te plass.

Forslag til svar: Antagelsene gir at A kan diagonaliseres, la M være matrisen slik at $i$te søyle i M er $i$te egenvektor, og la D være diagonalmatrisen med $i$te egenverdi på $i$te plass. Da er

$$\begin{aligned} A &= MDM^{-1} \\ &= MZ^2M^{-1}, \qquad \text{siden } D \text{ har kvadratrot} \\ &= MZM^{-1}MZM^{-1} \\ &= B^2, \qquad \text{der } B = MZM^{-1}. \end{aligned}$$

Forslag til svar: Egenverdiene til A er $1, 4, 9$ og egenvektorene blir

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}.$$

Da blir

$$M = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 2\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1/2\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}.$$

Følgelig får vi at

$$B = M\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}M^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Eksamen, 15. juni 2016

Oppgave 1.
La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 19/20 & 3/20 \\ 3/20 & 11/20 \end{pmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til A.

Løsning: Den karakteristiske likningen blir

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= (\lambda - 19/20)(\lambda - 11/20) - 9/400 \\ &= \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{209}{400} - \frac{9}{400} = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

slik at egenverdiene blir

$$\lambda = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4},$$

som gir $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1/2$.

Vi har at

$$I - A = \begin{pmatrix} 1/20 & -3/20 \\ -3/20 & 9/20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Komponentene i en egenvektor for $\lambda_1 = 1$ må dermed oppfylle $x = 3y$, slik at en egenvektor må være på formen $\begin{pmatrix} 3y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Velger vi $y = 1$ får vi spesielt egenvektoren $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vi har at

$$\frac{1}{2} I - A = \begin{pmatrix} -9/20 & -3/20 \\ -3/20 & -1/20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -9 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Komponentene i en egenvektor for $\lambda_2 = 1/2$ må dermed oppfylle $y = -3x$, slik at en egenvektor må være på formen $\begin{pmatrix} x \\ -3x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Velger vi $x = 1$ får vi spesielt egenvektoren $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

b) Skriv vektoren $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 23 \\ 1 \end{pmatrix}$ som en sum av egenvektorer, og regn ut grenseverdien $\lim_{n\to\infty} A^n \mathbf{w}$.

Løsning: Fra a) har vi at $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ er en basis av egenvektorer. For å skrive $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 23 \\ 1 \end{pmatrix}$ som en lineær kombinasjon av disse radreduserer vi

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 23 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 23 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 10 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

slik at $\mathbf{w} = 7\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$. Vi får dermed

$$\lim_{n\to\infty} A^n \mathbf{w} = \lim_{n\to\infty} A^n (7\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2) = \lim_{n\to\infty} \left(7\mathbf{v}_1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \mathbf{v}_2) \right) = 7\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 21 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Oppgave 2.
Bruk Lagrange's multiplikatormetode til å finne det punktet hvor funksjonen $f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$ har sitt minimum under betingelsen $x + y + z = 1$. Hva kan du si om maksimum?

Løsning: Vi har at $\nabla f = (2x, 8y, 18z)$, og $\nabla g = (1,1,1)$. Det er umulig å få $\nabla g = \mathbf{0}$, slik at vi bare trenger se på gradientlikningen $\nabla f = \lambda \nabla g$. Siden komponentene i vektoren på høyre side er like, så må de også være det på venstre side, slik at $2x = 8y = 18z$, og dermed $x = 9z$, $y = 9z/4$. Setter vi dette inn i $x + y + z = 1$ får vi at $49z/4 = 1$, slik at $z = 4/49$. Da blir $x = 36/49$, $y = 9/49$, slik at vi får eneste kandidat som $(36/49, 9/49, 4/49)$.

Ved å bevege oss i planet $x + y + z = 1$ langt bort fra origo er det klart at vi kan finne så store verdier for f vi bare vil. f kan derfor ikke ha noe globalt maksimum. Hvis vi begrenser oss til punkter der $\|(x,y,z)\| \leq r$ så er det klart at vi kan velge r slik at f er vilkårlig stor utenfor dette området. Siden dette området er både lukket og begrenset så har det spesielt et minimum, og dette må da være et globalt minimum, siden verdiene utenfor $\|(x,y,z)\| \leq r$ kan antas å være større. Punktet vi har funnet må være dette globale minimumet.

Oppgave 3.
I denne oppgaven skal vi finne volumet V til området avgrenset av paraboloiden $z = 6 - x^2 - y^2$ og kjeglen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Vis at

$$V = \int\int_D (6 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 + y^2})dxdy$$

der D er et område i xy-planet. Hvilket område er D?

Løsning: I polarkoordinater er paraboloiden gitt ved $z = 6 - r^2$, og kjeglen $z = r$. Skjæringen mellom disse finner vi når $6 - r^2 = r$, som gir $r^2 + r - 6 = 0$, som gir $r = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$. Den eneste positive løsningen her er $r = 2$, slik at skjæringen er sirkelen $x^2 + y^2 = r^2 = 4$, og D er området innenfor denne sirkelen. I $(0, 0)$ er det klart at paraboloiden tar verdien 6, mens kjeglen tar verdien 0, slik at paraboloiden ligger over kjeglen i det avgrensede området. Det følger at $V = \int\int_D (6 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 + y^2})dxdy$.

b) Regn ut V.

Løsning: I polarkoordinater blir integralet

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 (6-r^2-r)rdr\right]d\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (6r-r^3-r^2)drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[3r^2-\frac{1}{4}r^4-\frac{1}{3}r^3\right]_0^2 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(12-4-\frac{8}{3}\right)d\theta = 2\pi\frac{16}{3} = \frac{32\pi}{3}
\end{aligned}$$

Oppgave 4. La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & 5 \\ 3 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Finn en maksimal mengde av lineært uavhengige søyler i A.

Løsning: Nuller vi ut 3 elementer i første søyle får vi først

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & 5 \\ 3 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Nuller vi ut elementene i tredje søyle får vi nå $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ slik at første og tredje søyle er pivotsøyler, og disse svarer da til de lineært uavhengige søylene.

b) Finn en vektor $\mathbf{b}_1$ slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ ikke har noen løsning, og en annen vektor $\mathbf{b}_2$ slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ har uendelig mange løsninger.

Løsning: La C være trappematrisen vi endte opp med over. Med $\tilde{\mathbf{b}_1} = (0,0,0,1)$, så er det klart at $C\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}_1}$ ikke har noen løsning. Hvis vi gjør de inverse radoperasjonene over i motsatt rekkefølge vil vi få

$$\begin{pmatrix} C & \tilde{\mathbf{b}_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

siden siste søyle ikke ganges opp ellers legges til noen av de andre, og siden de andre elementene i siste søyle er 0 (som gjør at siste søyle ikke blir endret. Dermed kan vi velge $\mathbf{b}_1 = \tilde{\mathbf{b}_1} = (0,0,0,1)$.

Siden A har søyler som ikke er pivotsøyler så er den heller ikke inverterbar, og da vet vi at $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har uendelig mange løsninger. Vi kan derfor velge $\mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$. Du kan også velge en vilkårlig $\tilde{\mathbf{b}_2}$ slik at $\begin{pmatrix} C & \tilde{\mathbf{b}_2} \end{pmatrix}$ ikke har pivotelement i siste søyle (feks. $\tilde{\mathbf{b}_2} = (0, 1, 0, 0)$), og også her gjøre de inverse radoperasjonene i motsatt rekkefølge:

$$\begin{pmatrix} C & \tilde{\mathbf{b}_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

som gir at systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ med $\mathbf{b}_2 = (0, 1, 3, 2)$ også har uendelig mange løsninger.

Oppgave 4. Hva blir konvergensområdet for rekken $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n+1}$. Finn også et uttrykk for $S(x)$ der rekken konvergerer.

Løsning: Forholdstesten gir at $|a_{n+1}/a_n| = |(x+1)(n+1)/(n+2)| \to |x+1|$, slik at rekken konvergerer i $(-2,0)$ (forholdstesten for $x=-1$ gir ikke mening på grunn av 0 i teller og nevner, men da er alle leddene 0, slik at rekken konvergerer også da). For $x=-2$ får vi rekka $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n/(n+1)$. Denne er alternerende, og absoluttverdiene av leddene er avtagende og går mot 0. Dermed blir rekken konvergent. For $x=0$ får vi rekka $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(n+1)$, som er divergent. Konvergensområdet blir derfor $[-2,0)$.

For å regne ut summen av rekka skriver vi først

$$(x+1)S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x+1)^{n+1}/(n+1).$$

Deriverer vi denne får vi at

$$((x+1)S(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} (x+1)^n = 1/(1-(x+1)) = -1/x.$$

Integrasjon gir så at $(x+1)S(x) = -\ln|x| + C$. Ved å sette inn $x = -1$ er det klart at $C = 0$, slik at $S(x) = -\ln|x|/(x+1)$, ihvertfall når $x \neq -1$ (det er klart at $S(-1) = 1$, og dette er grenseverdien for $-\ln|x|/(x+1)$ når $x \to -1$, siden summen av en rekke er kontinuerlig i konvergensområdet, i.e. Abels teorem). $-\ln|x|/(x+1)$ er også kontinuerlig for $x = -2$, slik at $S(x) = -\ln|x|/(x+1)$ også for $x = -2$ på grunn av Abels teorem.

Oppgave 5. I denne oppgaven skal vi se på funksjonen

$$f(x,y) = -x^2 + 3x - xe^y + y.$$

a) Finn de stasjonære punktene til f.

Løsning: Gradienten til f er $(-2x+3-e^y, -xe^y+1)$. Skal begge komponentene her være 0 så følger det fra den andre likningen at $e^y = 1/x$. Setter vi dette inn i den første likningen får vi at $-2x+3-1/x = 0$, som gir at $-2x^2+3x-1 = 0$, slik at $2x^2-3x+1 = 0$, og $x = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}$, slik at $x = 1$ eller $x = 1/2$. Dette gir punktene $(1,0)$ og $(1/2, \ln 2)$. **b)** Avgjør om de stasjonære punktene er sadelpunkter, lokale minimumspunkter, eller lokale maksimumspunkter.

Løsning: Hessematrisen til f er $\begin{pmatrix} -2 & -e^y \\ -e^y & -xe^y \end{pmatrix}$. For punktet $(1,0)$ blir Hessematrisen $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, som har determinant $2-1 = 1 > 0$. Siden $A = -2 < 0$ gir dette et lokalt maksimumspunkt. For punktet $(1/2, \ln 2)$ blir Hessematrisen $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, som har determinant $2-4 = -2 < 0$, slik at vi her har et sadelpunkt.

Eksamen, 10. juni 2015

Oppgave 1. I denne oppgaven er $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funksjonen

$$f(x, y) = 2x^2y + 2xy + y^2$$

a) (10 poeng) Finn de stasjonære punktene til f.

b) (10 poeng) Avgjør om de stasjonære punktene er sadelpunkter, lokale minimumspunkter eller lokale maksimumspunkter.

Oppgave 1. a) Vi partiellderiverer funksjonen $f(x,y) = 2x^2y + 2xy + y^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + 2y = 2y(2x+1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 2x + 2y = 2(x^2 + x + y)$$

I et stasjonært punkt må begge de partiellderiverte være null. Fra det første uttrykket ser vi at skal $\frac{\partial f}{\partial x}$ være null, må $y = 0$ eller $x = -\frac{1}{2}$. Vi drøfter disse tilfellene hver for seg:

$\underline{y = 0}$: Setter vi $y = 0$ inn i det andre uttrykket, ser vi at skal $\frac{\partial f}{\partial y}$ være 0, må $x^2 + x = 0$. Det betyr at $x = 0$ eller $x = -1$. Dermed har vi de kritiske punktene $(0,0)$ og $(-1,0)$.

$\underline{x = -\frac{1}{2}}$: Setter vi $x = -\frac{1}{2}$ inn i det andre yttrykket, ser vi at skal $\frac{\partial f}{\partial y}$ være 0, må $(-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + y = 0$. Dette gir $y = \frac{1}{4}$, og dermed er $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ et kritisk punkt.

I alt har vi dermed tre kritiske punkter: $(0,0)$, $(-1,0)$ og $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

b) Vi skal bruke annenderiverttesten til å avgjøre hva slags kritiske punkter vi har. De annenderiverte er

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4x + 2, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

Vi bruker annenderiverttesten på hvert av punktene:

$\underline{(0,0)}$: Vi har $A = 0$, $B = 2$, $C = 2$ og

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Siden $D < 0$, er $(0,0)$ et sadelpunkt.

$\underline{(-1,0)}$: Vi har $A = 0$, $B = -2$, $C = 2$ og

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Siden $D < 0$, er $(-1,0)$ et sadelpunkt.

$\underline{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})}$: Vi har $A = 1$, $B = 0$, $C = 2$ og

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Siden $D > 0$ og $A > 0$, er $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ et lokalt minimum.

Oppgave 2. (10 poeng) Finn konvergensområdet til rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n2^n}$$

Oppgave 2. Vi bruker først forholdstesten til å finne konvergensradien:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{(x-2)^n}{n2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n|x-2|}{2(n+1)} = \frac{|x-2|}{2}$$

Rekken konvergerer når $\frac{|x-2|}{2} < 1$, dvs. når $|x-2| < 2$, eller med andre ord når $0 < x < 4$. Rekken divergerer når $\frac{|x-2|}{2} > 1$, dvs. når $x < 0$ eller $x > 4$. De to grensetilfellene $x = 0$ og $x = 4$ må undersøkes nærmere:

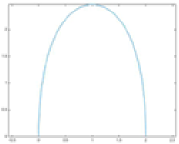
$\underline{x = 0}$: Rekken er nå $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(0-2)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Dette er en alternerende rekke der størrelsen på leddene avtar mot null, og følgelig er rekken konvergent.

$\underline{x = 4}$: Rekken er nå $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-2)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Dette er en velkjent divergent rekke.

<u>Konklusjon:</u> Konvergensintervallet er $[0, 4)$.

Oppgave 3. Figuren viser et MATLAB-plot av en kurve $\mathcal{C}$ med parametrisering

$$\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t)\,\mathbf{i} + t(\pi - t)\,\mathbf{j}\,, \quad \text{der } t \in [0, \pi]$$



a) (10 poeng) Forklar at arealet A til området mellom kurven og x-aksen er gitt ved

$$A = \int_{\mathcal{C}} x\,dy + \int_{\mathcal{D}} x\,dy$$

der $\mathcal{D}$ er linjestykket fra $(0, 0)$ til $(2, 0)$.

b) (10 poeng) Regn ut A.

Oppgave 3. a) Den stykkevis glatte kurven $\mathcal{C}'$ vi får ved å sette sammen $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$, gjennomløper omkretsen til området vårt i postiv omløpsretning. Ifølge Greens teorem (ellet et av dets korollarer) er da

$$A = \int_{\mathcal{C}'} x\,dy = \int_{\mathcal{C}} x\,dy + \int_{\mathcal{D}} x\,dy$$

b) Vi observerer først at $\int_{\mathcal{D}} x\,dy = 0$ siden vi får $dy = 0$ når vi parametriserer linjestykket fra $(0,0)$ til $(2,0)$. For $\mathcal{C}$ ser vi at $dy = (\pi - 2t)\,dt$, og dermed har vi

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathcal{C}} x\,dy + \int_{\mathcal{D}} x\,dy = \int_{\mathcal{C}} x\,dy \\ &= \int_0^{\pi} (1 + \cos t)(\pi - 2t)\,dt \end{aligned}$$

Det er flere måter å løse dette integralet på. Den mest naturlige er kanskje å bruke delvis integrasjon med $u = \pi - 2t$ og $v' = (1 + \cos t)$. Da er $u' = -2$ og $v = t + \sin t$, og vi får

$$A = \int_0^{\pi} (1 + \cos t)(\pi - 2t)\,dt = \Big[(\pi - 2t)(t + \sin t)\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-2)(t + \sin t)\,dt$$

$$= -\pi^2 + 2\left[\frac{t^2}{2} - \cos t\right]_0^{\pi} = -\pi^2 + \pi^2 + 4 = 4$$

Oppgave 4. I denne oppgaven er V volumet til området avgrenset av de to paraboloidene

$$z = x^2 + 2x + y^2 - 4y$$

$$z = 6 - x^2 - 2x - y^2 - 4y$$

a) (10 poeng) Forklar at

$$V = 2 \iint_D (3 - x^2 - y^2 - 2x)\, dxdy$$

der D er et område i xy-planet. Hvilket område er D?

b) (10 poeng) Regn ut V.

Oppgave 4. a) De to flatene skjærer hverandre når

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y = 6 - x^2 - 2x - y^2 - 4y$$

dvs. når

$$x^2 + 2x + y^2 = 3$$

Fullfører vi kvadratet, får vi

$$(x+1)^2 + y^2 = 4$$

som viser at skjæringskurven er en sirkel som har radius 2 og sentrum i $(-1,0)$. For (x,y)-verdier innenfor denne sirkelen ligger paraboloiden $z = 6 - x^2 - 2x - y^2 - 4y$ over $z = x^2 + 2x + y^2 - 4y$, og arealet til området avgrenset av flatene er dermed gitt ved

$$V = \iint_D \left[(6 - x^2 - 2x - y^2 - 4y) - (x^2 + 2x + y^2 - 4y)\right] dxdy$$

$$= 2\iint_D (3 - x^2 - 2x - y^2)\, dxdy$$

der D er sirkelskiven $(x+1)^2 + y^2 \leq 4$ med sentrum i $(-1,0)$ og radius 2.

b) For å regne ut V skifter vi til polarkoordinater med sentrum i $(-1,0)$, dvs. vi setter $x = -1 + r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$. Jacobi-determinanten er r, og vi får

$$V = 2\iint_D (3 - x^2 - 2x - y^2)\,dxdy = 2\iint_D (4 - (x+1)^2 - y^2)\,dxdy$$

$$= 2\int_0^2 \int_0^{2\pi} (4 - r^2) r\,d\theta\,dr = 4\pi \int_0^2 (4 - r^2) r\,dr$$

$$= 4\pi \int_0^2 (4r - r^3)\,dr = 4\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 4\pi[8 - 4] = 16\pi$$

Oppgave 5. I denne oppgaven kan du uten bevis bruke følgende konsekvens av spektralteoremet: Dersom $\mathbf{v}_1$ er en egenvektor til en symmetrisk $n \times n$-matrise A, så finnes det en ortogonal basis av egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ til A som inneholder $\mathbf{v}_1$ (en basis er *ortogonal* dersom vektorene står normalt på hverandre).

I hele oppgaven er A_n den $n \times n$-matrisen der alle elementene er 1, dvs.

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

a) (10 poeng) Vis at

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

er en egenvektor til A_n. Hva er egenverdien? Vis også at alle ikke-null vektorer som står normalt på $\mathbf{v}_1$, er egenvektorer. Hvor mange forskjellige egenverdier har A_n, og hvilken multiplisitet har de?

b) (10 poeng) Finn en ortogonal basis med egenvektorer til A_3.

c) (10 poeng) For hvert reelt tall a er $A_n(a)$ matrisen

$$A_n(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & a \end{pmatrix} = (a-1)I_n + A_n$$

Oppgave 5. a) Vi ser at

$$A_n\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = n\mathbf{v}_1$$

som viser at $\mathbf{v}_1$ er en egenvektor med egenverdi n.

Dersom $\mathbf{u}$ står ortogonalt på $\mathbf{v}_1$, er $0 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u} = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Dermed er

$$A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + u_2 + \cdots u_n \\ u_1 + u_2 + \cdots u_n \\ \vdots \\ u_1 + u_2 + \cdots u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0\mathbf{u}$$

som viser at $\mathbf{u}$ er en egenvektor med egenverdi 0.

Siden det finnes en *ortogonal* basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ som inneholder $\mathbf{v}_1$, må alle de andre egenvektorene $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ ha egenverdi 0. Det betyr at A_n bare har to forskjellige egenverdier n og 0, og at multiplisitetene er henholdsvis 1 og $n - 1$.

b) Det er mange måter å løse denne oppgaven på. Fra a) vet vi at $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor med egenverdi 3, og at alle vektorer som står normalt på $\mathbf{v}_1$, er egenvektorer med egenverdi 0. Det er derfor nok å finne to innbyrdes normale vektorer som står normalt på $\mathbf{v}_1$. En vektor $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ står normalt på $\mathbf{v}_1$ dersom $x+y+z=0$. Ett naturlig valg er $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, og et annet er $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, og disse to er innbyrdes normale. Dermed er

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en ortogonal basis av egenvektorer med egenverdier 3, 0 og 0 (det er mange andre ortogonale basiser av egenvektorer for A_3).

c) Anta at $\mathbf{v}$ er en egenvektor for A_n med egenverdi λ. Da er

$$A_n(a)\mathbf{v} = ((a-1)I_n + A_n)\mathbf{v} = (a-1)I_n\mathbf{v} + A_n\mathbf{v} = (a-1)\mathbf{v} + \lambda\mathbf{v} = (a+\lambda-1)\mathbf{v}$$

som viser at $\mathbf{v}$ er en egenvektor for $A_n(a)$ med egenverdi $a + \lambda - 1$. Siden egenverdiene til A_n er n (med multiplisitet 1) og 0 (med multiplisitet $n-1$), så må vi for $A_n(a)$ ha:

$a + n - 1$ er en egenverdi med multiplisitet 1

$a - 1$ er en egenverdi med multiplisitet $n - 1$.