15. februar 2022

MAT 1110

Obligatorisk oppgave 1 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 3. mars 2022, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Alle delspørsmålene teller like mye og for å få godkjent trengs ca. 50 % av maks-skår, dvs. rundt 50 poeng. Poengene på hvert delspørsmål gis skjønnsmessig etter følgende algoritme:

Rett besvarelse, eventuelt med mindre, uvesentlige feil: **8-10 poeng**
Et forsøk på løse oppgaven som av en eller annen grunn ikke førte fram: **2-7 poeng**
Helt blank oppgave: **-2 poeng**

Oppgave 1. I denne oppgaven kan du få bruk for de hyperbolske funksjonene

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

og deres omvendte funksjoner $\operatorname{arcsinh}(x)$ og $\operatorname{arccosh}(x)$. Funksjonene oppfyller relasjonen $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ og vi har

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsinh}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \frac{d}{dx}\operatorname{arccosh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

(a) En kurve $\mathcal{C}$ er gitt ved parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = \left(a \cdot \operatorname{arcsinh}\left(\frac{t}{a}\right), \sqrt{t^2+a^2}\right), \quad -b \le t \le b$$

hvor $b > 0$. Finn hastighetsvektoren $\mathbf{r}'(t)$ til kurven, og vis at vi har $||\mathbf{r}'(t)|| = 1$ for alle t.

(b) Vis at buelengden til kurven er $2b$.

En **kjedekurve** er den kurven som framkommer når en kjede henges opp mellom to faste holdepunkt. Den kalles også en **katenær** kurve etter *catena* - kjede på latin. På hver del av kjeden virker kun tyngdekraften og strekkraften langs kjeden. Figuren under illustrerer en kjedekurve. Kurven $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ fra punkt a), beskriver akkurat en kjedekurve.

(c) Bruk MATLAB eller et annet program til å lage en illustrasjon av kjedekurven for passende verdier av a og b, f.eks. $a = 1$ og $b = 3$.

Omdreiningsflaten $\mathcal{S}$ vi får ved å dreie kjedelinjen om x-aksen kalles en **katenoide**. Den kan parametriseres ved

$$\rho(t, \theta) = \left(a \cdot \operatorname{arcsinh}\left(\frac{t}{a}\right), \sqrt{t^2 + a^2} \cdot \cos(\theta), \sqrt{t^2 + a^2} \cdot \sin(\theta)\right)$$

hvor $-b \leq t \leq b$ og $0 \leq \theta < 2\pi$. Vi skal bruke notasjonen $\rho_t = \frac{\partial \rho}{\partial t}$, $\rho_{t\theta} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t \partial \theta}$, etc. Flatenormalen til en parametrisert flate i et gitt punkt står normalt på alle tangentretningene til flaten i punktet. Vi kan derfor finne flatenormalen ved å regne ut kryssproduktet $\rho_t \times \rho_\theta$. Hvis vi vil ha en enhetsnormal må vi i tillegg dele på lengden slik at vi får en enhetsvektor.

(d) Regn ut de partielt deriverte ρ_t og ρ_θ og vis at enhetsflatenormalen $\mathbf{n}$ til katenoiden $\mathcal{S}$ er gitt ved

$$\mathbf{n} = \left(\frac{t}{\sqrt{t^2 + a^2}}, -\frac{a \cdot \cos(\theta)}{\sqrt{t^2 + a^2}}, -\frac{a \cdot \sin(\theta)}{\sqrt{t^2 + a^2}}\right)$$

Definer nå følgende størrelser:

$$E = ||\rho_t||^2, \quad F = \rho_t \cdot \rho_\theta, \quad G = ||\rho_\theta||^2$$

og

$$L = \rho_{tt} \cdot \mathbf{n}, \quad M = \rho_{t\theta} \cdot \mathbf{n}, \quad N = \rho_{\theta\theta} \cdot \mathbf{n},$$

Her kan du fritt bruke at de dobbeltderiverte er gitt ved

$$\rho_{tt} = \left(-\frac{at}{(t^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{a^2 \cdot \cos(\theta)}{(t^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{a^2 \cdot \sin(\theta)}{(t^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\rho_{t\theta} = \left(0, -\frac{t \cdot \sin(\theta)}{\sqrt{t^2 + a^2}}, \frac{t \cdot \cos(\theta)}{\sqrt{t^2 + a^2}},\right)$$

$$\rho_{\theta\theta} = \left(0, -\sqrt{t^2 + a^2} \cdot \cos(\theta), -\sqrt{t^2 + a^2} \cdot \sin(\theta)\right)$$

Middelkrumningen til flaten $\mathcal{S}$ er gitt ved

$$H = \frac{1}{2}\frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}$$

En flate kalles en **minimalflate** dersom middelkrumningen $H = 0$ overalt.

(e) Vis at flaten $\mathcal{S}$ er en minimalflate.

Sluttkommentar: La Σ_1 være en sirkel i et parallellplan til (y, z)-planet med sentrum i $(-b \cdot \operatorname{arcsinh}(\frac{b}{a}), 0, 0)$ og med radius $\sqrt{a^2 + b^2}$, og la Σ_2 være en parallell sirkel med sentrum i $(b \cdot \operatorname{arcsinh}(\frac{b}{a}), 0, 0)$ og samme radius. At $\mathcal{S}$ er en minimalflate betyr at av alle sammenhengende glatte flater som omslutter de to sirklene Σ_1 og Σ_2, så vil $\mathcal{S}$ være flaten med minst areal. Hvis man kunne dyppe de to parallelle sirklene ned i såpe vann, ville såpefilmen mellom dem være en minimalflate og dermed en katenoide. Ta gjerne en titt på opptaket fra Abelforelesningene ved UiO i 2019, <https://www.youtube.com/watch?v=Iip8VNrHK_8>. Etter rundt 16 minutter lager Matt Parker en katenoide av såpefilm.

Oppgave 2. Et vektorfelt $\mathbf{F}$ er gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ hvor a, b, c og d er reelle konstanter. Vi kan konstruere et annet vektorfelt som står normalt på $\mathbf{F}$, vi kaller det **normalfeltet** til $\mathbf{F}$, gitt ved $\mathbf{F}^{\perp}(x, y) = (-cx - dy, ax + by)$.

(a) Vis at feltene $\mathbf{F}$ og $\mathbf{F}^{\perp}$ står normalt på hverandre.

(b) Bestem konstanten d uttrykt ved a, b og c slik at feltet $\mathbf{F}^{\perp}$ er konservativt, og vis at

$$\phi(x, y) = -\frac{c}{2}x^2 + a\,xy + \frac{b}{2}y^2$$

er en potensialfunksjon ϕ for $\mathbf{F}^{\perp}$. I resten av oppgaven forholder vi oss til denne verdien av d som gjør feltet $\mathbf{F}^{\perp}$ konservativt.

Nivåkurvene til ϕ er gitt ved

$$cx^2 - 2a\,xy - by^2 = K$$

La $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ være en parametrisering av en nivåkurve.

(c) Bruk kjerneregelen til å vise at gradienten $\nabla\phi$ til potensialfunksjonen ϕ står normalt på nivåkurvene.

(d) Forklar hvorfor (c) gir at nivåkurvene til potensialfunksjonen ϕ er strømningslinjer for vektorfeltet $\mathbf{F}$.

(e) Velg to sett av verdier for a, b og c, ett med $a^2 + bc > 0$ og ett med $a^2 + bc < 0$. Bruk MATLAB til å illustrere vektorfeltet $\mathbf{F}$ i disse to tilfellene. Tegn også inn noen nivåkurver i hvert av tilfellene. (Bruk MATLAB-kommandoen contour).