OBLIG 1, våren 2022
løsningsforslag

Oppgave 1. I denne oppgaven kan du få bruk for de hyperbolske funksjonene

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

og deres omvendte funksjoner $\operatorname{arcsinh}(x)$ og $\operatorname{arccosh}(x)$. Funksjonene oppfyller relasjonen $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ og vi har

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsinh}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \frac{d}{dx}\operatorname{arccosh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

(a) En kurve $\mathcal{C}$ er gitt ved parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = \left(a \cdot \operatorname{arcsinh}(\frac{t}{a}), \sqrt{t^2+a^2}\right), \quad -b \leq t \leq b$$

hvor $b > 0$. Finn hastighetsvektoren $\mathbf{r}'(t)$ til kurven, og vis at vi har $||\mathbf{r}'(t)|| = 1$ for alle t.

Løsning.

$$\mathbf{r}'(t) = \left(\frac{a}{\sqrt{t^2+a^2}}, \frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}},\right)$$

og

$$||\mathbf{r}'(t)|| = \sqrt{(\frac{a}{\sqrt{t^2+a^2}})^2 + (\frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}})^2} = 1$$

(b) Vis at buelengden til kurven er $2b$.

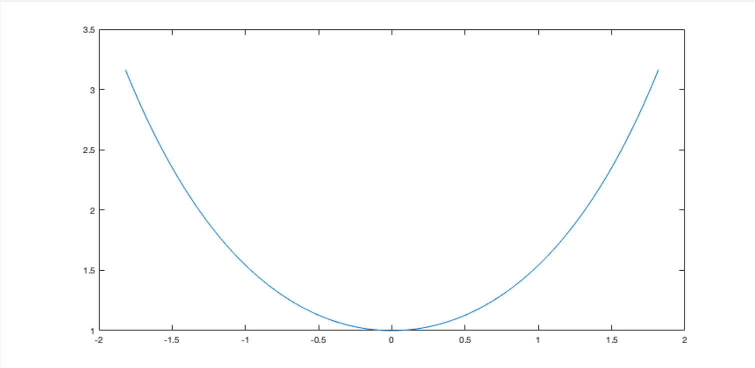
Løsning.

$$B = \int_{\mathcal{C}} ds = \int_{-b}^{b} ||\mathbf{r}'(t)||\, dt = \int_{-b}^{b} 1\, dt = 2b$$

En **kjedekurve** er den kurven som framkommer når en kjede henges opp mellom to faste holdepunkt. Den kalles også en **katenær** kurve etter *catena* - kjede på latin. På hver del av kjeden virker kun tyngdekraften og strekkraften langs kjeden. Figuren under illustrerer en kjedekurve. Kurven $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ fra punkt a), beskriver akkurat en kjedekurve.

(c) Bruk MATLAB eller et annet program til å lage en illustrasjon av kjedekurven for passende verdier av a og b, f.eks. $a = 1$ og $b = 3$.

Løsning.
Ved å bruke kommandoene
```
>> t=-3:0.01:3;
>> plot(asinh(t),sqrt(t.^2+1))
```
får vi ut figuren



Omdreiningsflaten $\mathcal{S}$ vi får ved å dreie kjedelinjen om x-aksen kalles en **katenoide**. Den kan parametriseres ved

$$\rho(t, \theta) = \left(a \cdot \operatorname{arcsinh}\left(\frac{t}{a}\right), \sqrt{t^2 + a^2} \cdot \cos(\theta), \sqrt{t^2 + a^2} \cdot \sin(\theta)\right)$$

hvor $-b \leq t \leq b$ og $0 \leq \theta < 2\pi$. Vi skal bruke notasjonen $\rho_t = \frac{\partial \rho}{\partial t}$, $\rho_{t\theta} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t \partial \theta}$, etc. Flatenormalen til en parametrisert flate i et gitt punkt står normalt på alle tangentretningene til flaten i punktet. Vi kan derfor finne flatenormalen ved å regne ut kryssproduktet $\rho_t \times \rho_\theta$. Hvis vi vil ha en enhetsnormal må vi i tillegg dele på lengden slik at vi får en enhetsvektor.

(d) Regn ut de partielt deriverte ρ_t og ρ_θ og vis at enhetsflatenormalen $\mathbf{n}$ til katenoiden $\mathcal{S}$ er gitt ved

$$\mathbf{n} = \left(\frac{t}{\sqrt{t^2 + a^2}}, -\frac{a \cdot \cos(\theta)}{\sqrt{t^2 + a^2}}, -\frac{a \cdot \sin(\theta)}{\sqrt{t^2 + a^2}}\right)$$

Løsning.

$$\rho_t = \left(\frac{a}{\sqrt{t^2+a^2}}, \frac{t\cdot\cos(\theta)}{\sqrt{t^2+a^2}}, \frac{t\cdot\sin(\theta)}{\sqrt{t^2+a^2}}\right)$$

$$\rho_\theta = \left(0, -\sqrt{t^2+a^2}\cdot\sin(\theta), \sqrt{t^2+a^2}\cdot\cos(\theta)\right)$$

og kryssproduktet er gitt ved

$$\begin{aligned}\rho_t \times \rho_\theta &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{a}{\sqrt{t^2+a^2}} & \frac{t\cdot\cos(\theta)}{\sqrt{t^2+a^2}} & \frac{t\cdot\sin(\theta)}{\sqrt{t^2+a^2}} \\ 0 & -\sqrt{t^2+a^2}\cdot\sin(\theta) & \sqrt{t^2+a^2}\cdot\cos(\theta)\end{vmatrix} \\ &= \left(t\cdot\cos^2(\theta)+t\cdot\sin^2(\theta), -a\cdot\cos(\theta), -a\cdot\sin(\theta)\right) \\ &= (t, -a\cdot\cos(\theta), -a\cdot\sin(\theta))\end{aligned}$$

Denne har lengde

$$||\rho_t \times \rho_\theta|| = \sqrt{t^2+(-a\cdot\cos(\theta))^2+(-a\cdot\sin(\theta))^2} = \sqrt{t^2+a^2}$$

så en enhets-flatenormal er gitt ved

$$\mathbf{n} = \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}}, -\frac{a\cdot\cos(\theta)}{\sqrt{t^2+a^2}}, -\frac{a\cdot\sin(\theta)}{\sqrt{t^2+a^2}}\right)$$

Definer nå følgende størrelser:

$$E = ||\rho_t||^2, \quad F = \rho_t\cdot\rho_\theta, \quad G = ||\rho_\theta||^2$$

og

$$L = \rho_{tt}\cdot\mathbf{n}, \quad M = \rho_{t\theta}\cdot\mathbf{n}, \quad N = \rho_{\theta\theta}\cdot\mathbf{n},$$

Her kan du fritt bruke at de dobbeltderiverte er gitt ved

$$\rho_{tt} = \left(-\frac{at}{(t^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{a^2\cdot\cos(\theta)}{(t^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{a^2\cdot\sin(\theta)}{(t^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\rho_{t\theta} = \left(0, -\frac{t\cdot\sin(\theta)}{\sqrt{t^2+a^2}}, \frac{t\cdot\cos(\theta)}{\sqrt{t^2+a^2}},\right)$$

$$\rho_{\theta\theta} = \left(0, -\sqrt{t^2+a^2}\cdot\cos(\theta), -\sqrt{t^2+a^2}\cdot\sin(\theta)\right)$$

Middelkrumningen til flaten $\mathcal{S}$ er gitt ved

$$H = \frac{1}{2}\frac{EN-2FM+GL}{EG-F^2}$$

En flate kalles en **minimalflate** dersom middelkrumningen $H = 0$ overalt.

(e) Vis at flaten $\mathcal{S}$ er en minimalflate.

Løsning.
Vi har

$$\rho_{tt} = \left(-\frac{at}{(t^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{a^2\cdot\cos(\theta)}{(t^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{a^2\cdot\sin(\theta)}{(t^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\rho_{t\theta} = \left(0, -\frac{t\cdot\sin(\theta)}{\sqrt{t^2+a^2}}, \frac{t\cdot\cos(\theta)}{\sqrt{t^2+a^2}},\right)$$

og

$$\rho_{\theta\theta} = \left(0, -\sqrt{t^2+a^2}\cdot\cos(\theta), -\sqrt{t^2+a^2}\cdot\sin(\theta)\right)$$

Dette gir

$$E = ||\rho_t||^2 = 1, \quad F = \rho_t\cdot\rho_\theta = 0, \quad G = ||\rho_\theta||^2 = t^2+a^2$$

og

$$L = \rho_{tt}\cdot\mathbf{n} = -\frac{at^2-a^3}{(t^2+a^2)^2} = -\frac{a}{t^2+a^2},$$
$$M = \rho_{t\theta}\cdot\mathbf{n} = 0, \quad N = \rho_{\theta\theta}\cdot\mathbf{n} = a$$

og dermed

$$H = \frac{1}{2}\frac{EN-2FM+GL}{EG-F^2} = \frac{1}{2}\frac{1\cdot a - 2\cdot 0\cdot 0 - (t^2+a^2)\cdot\frac{a}{t^2+a^2}}{1\cdot\sqrt{t^2+a^2}-0^2} = 0$$

Sluttkommentar: La Σ_1 være en sirkel i et parallellplan til (y,z)-planet med sentrum i $(-b\cdot\operatorname{arcsinh}(\frac{b}{a}),0,0)$ og med radius $\sqrt{a^2+b^2}$, og la Σ_2 være en parallell sirkel med sentrum i $(b\cdot\operatorname{arcsinh}(\frac{b}{a}),0,0)$ og samme radius. At $\mathcal{S}$ er en minimalflate betyr at av alle sammenhengende glatte flater som omslutter de to sirklene Σ_1 og Σ_2, så vil $\mathcal{S}$ være flaten med minst areal. Hvis man kunne dyppe de to parallelle sirklene ned i såpe vann, ville såpefilmen mellom dem være en minimalflate og dermed en katenoide. Ta gjerne en titt på opptaket fra Abelforelesningene ved UiO i 2019, <https://www.youtube.com/watch?v=Iip8VNrHK_8>. Etter rundt 16 minutter lager Matt Parker en katenoide av såpefilm.

Oppgave 2. Et vektorfelt $\mathbf{F}$ er gitt ved $\mathbf{F}(x,y) = (ax+by, cx+dy)$ hvor a, b, c og d er reelle konstanter. Vi kan konstruere et annet vektorfelt som står normalt på $\mathbf{F}$, vi kaller det **normalfeltet** til $\mathbf{F}$, gitt ved $\mathbf{F}^{\perp}(x,y) = (-cx-dy, ax+by)$.

(a) Vis at feltene $\mathbf{F}$ og $\mathbf{F}^{\perp}$ står normalt på hverandre.

> **Løsning.**
>
> $$\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^{\perp} = (ax+by, cx+dy)\cdot(-cx-dy, ax+by) = 0$$

(b) Bestem konstanten d uttrykt ved a, b og c slik at feltet $\mathbf{F}^{\perp}$ er konservativt, og vis at

$$\phi(x,y) = -\frac{c}{2}x^2 + axy + \frac{b}{2}y^2$$

er en potensialfunksjon ϕ for $\mathbf{F}^{\perp}$. I resten av oppgaven forholder vi oss til denne verdien av d som gjør feltet $\mathbf{F}^{\perp}$ konservativt.

> **Løsning.**
> En nødvendig betingelse for at feltet er konservativt er at
>
> $$\frac{\partial}{\partial y}(-cx-dy) - \frac{\partial}{\partial y}(ax+by) = -d-a = 0$$
>
> Vi har
>
> $$\begin{aligned}\nabla\phi(x,y) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{c}{2}x^2+axy+\frac{b}{2}y^2), \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{c}{2}x^2+axy+\frac{b}{2}y^2)\right)\\ &= (-cx+ay, ax+by) = (-cx-dy, ax+by)\\ &= \mathbf{F}^{\perp}\end{aligned}$$

Nivåkurvene til ϕ er gitt ved

$$cx^2 - 2axy - by^2 = K$$

La $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ være en parametrisering av en nivåkurve.

(c) Bruk kjerneregelen til å vise at gradienten $\nabla\phi$ til potensialfunksjonen ϕ står normalt på nivåkurvene.

> **Løsning.**
> For nivåkurvene har vi $\phi(\mathbf{r}(t)) = \mathit{konstant}$. Det betyr at
>
> $$\frac{d}{dt}\phi(\mathbf{r}(t)) = \nabla\phi(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)) = 0$$
>
> og gradienten står dermed normalt på tangenten til kurven (som er det samme som at den står normalt på kurven).

(d) Forklar hvorfor (c) gir at nivåkurvene til potensialfunksjonen ϕ er strømningslinjer for vektorfeltet $\mathbf{F}$.

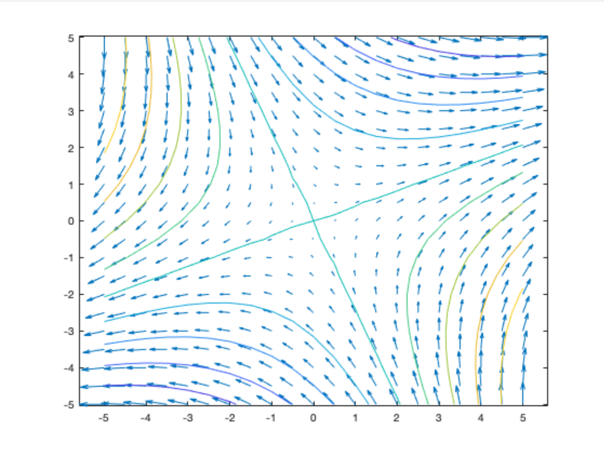
Løsning.
Strømningslinjene til $\mathbf{F}$ er parallelle med feltet $\mathbf{F}$ og står derfor normalt på $\mathbf{F}^{\perp} = \nabla\phi$. Men $\nabla\phi$ står også normalt på nivåkurvene, ergo er strømningslinjene og nivåkurvene parallelle, dvs. sammenfallende.

(e) Velg to sett av verdier for a, b og c, ett med $\Delta > 0$ og ett med $\Delta < 0$. Bruk MATLAB til å illustrere vektorfeltet $\mathbf{F}$ i disse to tilfellene. Tegn også inn noen nivåkurver i hvert av tilfellene. (Bruk MATLAB-kommandoen contour).

Løsning.
Vi setter først $a = b = c = 1$. Det gir oss $\mathbf{F}(x, y) = (x + y, x - y)$ og $\Delta = -(1^2 + 1 \cdot 1) = -2$. Ved å bruke kommandoene

```
>>x=-5:0.5:5; y=-5:0.5:5;
>> [x,y]=meshgrid(x,y);
>>u=x+y; v=x-y;
>>quiver(x,y,u,v);
>>hold on
>>z=x.^2-2*x.*y-y.^2;
>>contour(x,y,z)
```

får vi ut figuren



Så setter vi $a = c = 1$ og $b = -2$. Det gir oss $\mathbf{F}(x, y) = (x - 2y, x - y)$ og $\Delta = -(1^2 + (-2) \cdot 1) = 1$. Kommandoene blir da

```
>>x=-5:0.5:5;  y=-5:0.5:5;
>> [x,y]=meshgrid(x,y);
>>u=x-2*y;  v=x-y;
>>quiver(x,y,u,v);
>>hold on
>>z=x.^2-2*x.*y+2*y.^2;
>>contour(x,y,z)
```

som gir oss figuren